

**Giovanni Formighieri**

**O espaço-tempo de um dipolo magnético**

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Celso de Camargo Barros Jr.

Florianópolis, SC-Brasil

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Formighieri, Giovanni

O espaço-tempo de um dipolo magnético / Giovanni  
Formighieri ; orientador, Celso de Camargo Barros Jr. -  
Florianópolis, SC, 2015.  
149 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.  
Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Dipolo magnético. 3. Métrica de Weyl. 4.  
Espaço-tempo com simetria axial. I. de Camargo Barros Jr.,  
Celso. II. Universidade Federal de Santa Catarina.  
Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

*Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos e amigos,  
que me apoiaram nesta caminhada.*



## AGRADECIMENTOS

Agraço primeiramente aos meus pais João Cesar Pastoris Formighieri e Cléa Luiza Nazário Formighieri que me deram a educação e o carinho necessários para crescer e atingir os objetivos almejados na vida, com retidão e sabedoria. Agradeço a eles e também a meus irmãos Gustavo Formighieri e Fernanda Luiza Formighieri que acreditaram e me apoiaram em minha decisão de seguir a carreira de pesquisa em Física. Agradeço aos meus amigos Michel Pires de Araújo e Guilherme Lima pelas discussões leigas porém honestas e interessantes a respeito de diversos temas em Física e aos meus colegas de sala Graziâni Candiotto, Franciele Manoel da Silva e Luis Cesar Nunes dos Santos por me aturarem e contribuírem durante meus estudos. Por fim agradeço à minha namorada Angélica Pasini, pelo apoio, paciência, carinho e compreensão enquanto estive produzindo este trabalho.



*“Diante da vastidão do tempo  
e da imensidão do universo,  
é um imenso prazer para mim  
dividir um planeta  
e uma época com você.”  
(Carl Sagan)*





## RESUMO

Neste trabalho estudaremos o espaço-tempo de um dipolo magnético com massa, de simetria axial, utilizando a métrica de Weyl. Os casos limites dessa solução onde existe somente a massa ou somente o campo magnético serão também considerados. Por fim, uma aplicação dessa métrica é apresentada, a saber, o cálculo da dependência do ângulo de observação do comprimento de onda emitido por um objeto com um forte campo magnético. **Palavras-chaves:** dipolo magnético, métrica de Weyl, espaço-tempo com simetria axial.



## ABSTRACT

In this work we will study the spacetime of a magnetic dipole with mass, of axial symmetry, using the Weyl metric. The limit cases of this solution where there is only the mass or only the magnetic field will also be considered. Finally, an application of this metric is shown, to wit, the calculation of the observational angular dependency of the wavelength emitted by an object with a strong magnetic field. **Key-words:** magnetic dipole, Weyl metric, axially symmetric spacetime.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – O transporte paralelo . . . . .	30
Figura 2 – Campo magnético nas coordenadas de Weyl . . .	75
Figura 3 – Componente $g_{tt}$ para o ângulo polar $\theta = 0^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	78
Figura 4 – Componente $g_{tt}$ para o ângulo polar $\theta = 45^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	79
Figura 5 – Componente $g_{tt}$ para o ângulo polar $\theta = 90^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	80
Figura 6 – Componente $g_{rr}$ para o ângulo polar $\theta = 0^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	82
Figura 7 – Componente $g_{rr}$ para o ângulo polar $\theta = 45^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	83
Figura 8 – Componente $g_{rr}$ para o ângulo polar $\theta = 90^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	84
Figura 9 – Componente $g_{\theta\theta}$ para o ângulo polar $\theta = 0^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	85
Figura 10 – Componente $g_{\theta\theta}$ para o ângulo polar $\theta = 45^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	86
Figura 11 – Componente $g_{\theta\theta}$ para o ângulo polar $\theta = 90^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	87
Figura 12 – Componente $g_{\varphi\varphi}$ para o ângulo polar $\theta = 0^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	88
Figura 13 – Componente $g_{\varphi\varphi}$ para o ângulo polar $\theta = 45^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	89
Figura 14 – Componente $g_{\varphi\varphi}$ para o ângulo polar $\theta = 90^\circ$ e campo magnético $B = 10^{15}$ G . . . . .	90
Figura 15 – Componente $g_{tt}$ para o ângulo polar $\theta = 0^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	92
Figura 16 – Componente $g_{tt}$ para o ângulo polar $\theta = 45^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	93

Figura 17 – Componente $g_{tt}$ para o ângulo polar $\theta = 90^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	94
Figura 18 – Componente $g_{rr}$ para o ângulo polar $\theta = 0^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	95
Figura 19 – Componente $g_{rr}$ para o ângulo polar $\theta = 45^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	96
Figura 20 – Componente $g_{rr}$ para o ângulo polar $\theta = 90^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	97
Figura 21 – Componente $g_{\theta\theta}$ para o ângulo polar $\theta = 0^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	98
Figura 22 – Componente $g_{\theta\theta}$ para o ângulo polar $\theta = 45^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	99
Figura 23 – Componente $g_{\theta\theta}$ para o ângulo polar $\theta = 90^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	100
Figura 24 – Componente $g_{\varphi\varphi}$ para o ângulo polar $\theta = 0^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	101
Figura 25 – Componente $g_{\varphi\varphi}$ para o ângulo polar $\theta = 45^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	102
Figura 26 – Componente $g_{\varphi\varphi}$ para o ângulo polar $\theta = 90^\circ$ e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	103
Figura 27 – Componente $g_{tt}$ da métrica com massa e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	105
Figura 28 – Componente $g_{rr}$ da métrica com massa e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	106
Figura 29 – Componente $g_{\theta\theta}$ da métrica com massa e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	107
Figura 30 – Componente $g_{\varphi\varphi}$ da métrica com massa e campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	108
Figura 31 – Componente $g_{tt}$ da métrica com massa . . . . .	109
Figura 32 – Componente $g_{rr}$ da métrica com massa . . . . .	110
Figura 33 – Componente $g_{\theta\theta}$ da métrica com massa . . . . .	111
Figura 34 – Componente $g_{\varphi\varphi}$ da métrica com massa . . . . .	112

Figura 35 – Componente $g_{tt}$ da métrica com campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	113
Figura 36 – Componente $g_{rr}$ da métrica com campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	114
Figura 37 – Componente $g_{\theta\theta}$ da métrica com campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	115
Figura 38 – Componente $g_{\varphi\varphi}$ da métrica com campo magnético $B = 10^{18}$ G . . . . .	116
Figura 39 – Fator $n$ para a métrica com massa e com campo magnético de dipolo . . . . .	127
Figura 40 – Comparação entre os fatores $n$ . . . . .	128
Figura 41 – Fator $n$ para a métrica sem massa e com campo magnético de dipolo . . . . .	129
Figura 42 – Configuração do momento de dipolo magnético .	145





## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Variação da componente $g_{tt}$ ( $\theta = 0^\circ$ ) . . . . .	117
Tabela 2	–	Variação da componente $g_{tt}$ ( $\theta = 45^\circ$ ) . . . . .	118
Tabela 3	–	Variação da componente $g_{tt}$ ( $\theta = 90^\circ$ ) . . . . .	118
Tabela 4	–	Variação da componente $g_{rr}$ ( $\theta = 0^\circ$ ) . . . . .	119
Tabela 5	–	Variação da componente $g_{rr}$ ( $\theta = 45^\circ$ ) . . . . .	119
Tabela 6	–	Variação da componente $g_{rr}$ ( $\theta = 90^\circ$ ) . . . . .	120



## LISTA DE SÍMBOLOS

$c$	Velocidade da luz no vácuo
$G$	Constante gravitacional
$\Gamma$	Símbolo de Christoffel
$R$	Tensor de Riemann, Ricci e escalar de Ricci
$g$	Tensor métrico
$T$	Tensor de energia-momento
$F$	Tensor eletromagnético
$A$	Quadripotencial eletromagnético
$J$	Quadricorrente eletromagnética
$\phi$	Potencial elétrico
$\vec{a}$	Potencial vetor magnético
$a$	Componente azimutal do potencial vetor magnético
$m$	Massa
$q$	Momento de dipolo magnético
$G$	Gauss, unidade de campo magnético no sistema cgs (não está em itálico, diferentemente da constante gravitacional)



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	23
2	FORMALISMO DA RELATIVIDADE GE- RAL . . . . .	25
2.1	Coordenadas e tensores . . . . .	25
2.2	Derivada covariante . . . . .	28
2.3	Equações de campo de Einstein . . . . .	31
2.3.1	O tensor métrico . . . . .	33
2.3.2	O tensor de curvatura de Riemann . . . . .	35
2.3.3	O tensor de curvatura de Ricci . . . . .	36
2.3.4	O escalar de Ricci . . . . .	36
2.3.5	O tensor de energia-momento . . . . .	37
2.4	Equações de campo do eletromagnetismo . .	38
3	ESPAÇO-TEMPO COM SIMETRIA AXIAL	41
3.1	O eletrovácuo na métrica de Weyl . . . . .	42
4	O ESPAÇO-TEMPO DE UM DIPOLO MAG- NÉTICO . . . . .	47
4.1	Equações de campo de Einstein . . . . .	47
4.2	Equações de Maxwell . . . . .	61
4.3	Forma compacta das equações de campo . .	61
4.4	Solução de Gutsunaev e Manko . . . . .	62
4.5	Solução de Gutsunaev e Manko nas coorde- nadas de Schwarzschild . . . . .	64
4.5.1	Solução de Gutsunaev e Manko nas coorde- nadas de Schwarzschild, sem campo magné- tico . . . . .	68
4.5.2	Solução de Gutsunaev e Manko nas coorde- nadas de Schwarzschild, sem massa . . . . .	69
4.6	A forma do campo magnético . . . . .	73

4.7	A forma da métrica das soluções . . . . .	75
5	UMA CONSEQUÊNCIA DA PRESENÇA DE UM DIPOLO MAGNÉTICO . . . . .	123
6	CONCLUSÃO . . . . .	131
	Referências . . . . .	135
	APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO DA SO- LUÇÃO DE GUTSUNAEV E MANKO . . . . .	139
	APÊNDICE B – MOMENTO DE DIPOLO MAGNÉTICO DE UMA MAGNETAR . . . . .	145
	APÊNDICE C – CONSISTÊNCIA DE UNI- DADES . . . . .	147
C.1	Momento de dipolo magnético . . . . .	147
C.2	Geometrização de quantidades do sistema cgs-Gaussiano . . . . .	148

# 1 INTRODUÇÃO

A teoria da relatividade geral, desde sua concepção por Albert Einstein em 1916 (EINSTEIN, 1915)<sup>1</sup>, até hoje, nos desafia quanto às possíveis soluções de suas equações de campo. A primeira solução não trivial foi a solução de Schwarzschild (1916)<sup>2</sup>, que representa o campo gravitacional de uma massa esférica, sem momento angular, sem campo elétrico e sem campo magnético. Essa solução é útil pois é uma solução analítica simples e bem compreendida, e é uma ótima aproximação de diversos cenários que encontramos na natureza.

Atualmente existem dezenas de soluções das equações de Einstein, porém buscamos soluções cada vez mais realistas, ou seja, que incluam a maior quantidade de parâmetros físicos possíveis. Soluções exatas para uma massa esférica com carga e/ou momento angular já existem (REISSNER, 1916; KERR, 1963; NEWMAN et al., 1965), porém não encontramos ainda uma solução exata para uma massa esférica com momento angular, campo elétrico e campo magnético, arbitrários. Complicando mais ainda, poderíamos supor que a massa não fosse esférica, mas um elipsoide de revolução, por exemplo.

Neste trabalho investigaremos uma solução exata das equações de campo da relatividade geral, que representa o espaço-tempo composto de uma massa com tamanho infinitesimal (simetria esférica) e um momento de dipolo magnético. Essa solução específica faz parte de um conjunto de soluções eletrovácuo, com simetria axial (GRIFFITHS; PODOLSKÝ, 2009, p. 252). Através dessa solução podemos investigar o comportamento do espaço-tempo nas vizinhanças de objetos com campos magnéticos extremos, como por exemplo estrelas do tipo magnetar (DUNCAN; THOMPSON, 1992), que possuem campos em sua superfície de até  $10^{15}$  G.

A complexidade das soluções aumenta à medida que tentamos

---

<sup>1</sup> Tradução em inglês: Einstein (2014).

<sup>2</sup> Tradução em inglês: Schwarzschild (2008).

descrever com cada vez mais precisão as situações que encontramos no Universo. Veremos que a solução que iremos estudar é bastante extensa, porém exata e analítica, o que nos permite com bastante praticidade calcular diversas quantidades a respeito do respectivo espaço-tempo.

Ao longo deste trabalho, no capítulo 2, faremos uma introdução ao formalismo da relatividade geral. No capítulo 3, apresentaremos a métrica de Weyl (WEYL, 1917; WEYL, 1919; BACH, 1922)<sup>3</sup>, de simetria axial, e as equações de campo de Einstein nesta métrica para um espaço-tempo geral do tipo eletrovácuo, onde temos um quadri-potencial que dá origem a campos elétricos e magnéticos, com simetria axial. No capítulo 4, calcularemos as equações de campo de Einstein para um caso específico do espaço-tempo visto no capítulo 3, onde admitimos somente a presença de campos magnéticos na região de solução. Estudaremos uma solução dessas equações e suas implicações: a forma do campo magnético, o comportamento das componentes do tensor métrico e a magnitude da influência do campo magnético no espaço-tempo para diversos objetos existentes no Universo. No capítulo 5 faremos uma aplicação da solução estudada no capítulo 4, onde calcularemos a dependência com o ângulo polar do comprimento de onda da luz originada de uma estrela do tipo magnetar.

---

<sup>3</sup> Tradução em inglês: Weyl (2012a), Weyl (2012b), Bach e Weyl (2012).



## 2 FORMALISMO DA RELATIVIDADE GERAL

Na teoria da relatividade geral, a gravidade se manifesta através da curvatura do espaço-tempo e essa curvatura está relacionada com a distribuição de energia e momento de matéria e radiação.

Eventos no espaço-tempo são identificados por tuplas de quatro coordenadas, uma temporal e três espaciais. Não existem referenciais privilegiados e a linguagem dos tensores é utilizada por permitir uma formulação da teoria independente de sistemas de coordenadas.

Faremos aqui uma revisão rápida e concisa sobre o necessário da teoria para nossos fins.

### 2.1 COORDENADAS E TENSORES

A notação para um evento no espaço-tempo quadridimensional em um sistema de coordenadas qualquer é dada por um vetor na forma

$$x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4), \quad (2.1)$$

onde todas as letras gregas usadas como índices variam de 1 até 4. Um vetor representado por essa notação (índices em cima) é chamado de contravariante, enquanto que um vetor com índices embaixo é chamado de covariante.

Se fizermos a troca de sistema de coordenadas, as novas coordenadas são então expressas em função das antigas através da relação

$$x'^\mu = x'^\mu(x), \quad (2.2)$$

e as antigas coordenadas podem ser expressas em função das novas por

$$x^\mu = x^\mu(x'). \quad (2.3)$$

Os diferenciais dessas coordenadas obedecem às leis de transformação

$$dx'^{\mu} = \frac{dx'^{\mu}}{dx^{\nu}} dx^{\nu}, \quad (2.4)$$

$$dx^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{dx'^{\nu}} dx'^{\nu}, \quad (2.5)$$

e pela regra da cadeia, as derivadas parciais se transformam com

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}. \quad (2.7)$$

As leis de transformação das derivadas parciais definem as leis de transformação de vetores contravariantes e as leis de transformação dos operadores diferenciais definem as leis de transformação de vetores covariantes:

$$U'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} U^{\nu}, \quad (2.8)$$

$$U'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} U_{\nu}. \quad (2.9)$$

Vetores são simplesmente chamados de tensores de primeira ordem, ou seja, com apenas um índice. Tensores contravariantes, covariantes e mistos de ordem mais alta são apenas objetos que seguem

o mesmo padrão dos vetores em relação às suas leis de transformação entre coordenadas. Por tensores mistos entendemos como tensores que possuem uma mistura de índices em cima e embaixo. De forma geral, para um tensor de ordem  $m$ , temos

$$U^{i_1 \dots i_n}_{i_{n+1} \dots i_m} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_n}}{\partial x^{j_n}} \frac{\partial x^{j_{n+1}}}{\partial x'^{i_{n+1}}} \dots \frac{\partial x^{j_m}}{\partial x'^{i_m}} U^{j_1 \dots j_n}_{j_{n+1} \dots j_m}. \quad (2.10)$$

Um tensor de especial interesse na relatividade geral é o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , um tensor covariante de segunda ordem que encapsula todas as propriedades de um espaço-tempo e será objeto de estudo mais adiante. Ele e sua versão contravariante  $g^{\mu\nu}$  tem uma função especial de subir e descer índices de outros tensores da seguinte forma:

$$g^{\mu\nu} U_\nu = U^\mu, \quad (2.11)$$

$$g_{\mu\nu} U^\nu = U_\mu. \quad (2.12)$$

Agora, quando em um tensor existem dois índices repetidos, estando um deles em cima e outro embaixo, temos o que é chamado de uma contração de índices do tensor, que é simplesmente uma somatória nos índices repetidos (e que não são mais mostrados):

$$U^\mu{}_{\mu\nu} = U^1{}_{1\nu} + U^2{}_{2\nu} + U^3{}_{3\nu} + U^4{}_{4\nu} = U_\nu. \quad (2.13)$$

A contração de todos os índices de um tensor gera uma quantidade chamada de invariante ou escalar. Um invariante é um número que não depende do sistema de coordenadas utilizado e nem do observador que o está calculando. Para tensor de segunda ordem obtemos

$$U^\mu{}_\mu = U^1{}_1 + U^2{}_2 + U^3{}_3 + U^4{}_4. \quad (2.14)$$

Um tensor é dito simétrico, em relação a um conjunto de índices, quando ao permutar quaisquer dois índices desse conjunto,

temos como resultado o mesmo tensor. Para um tensor simétrico de segunda ordem por exemplo, temos que

$$U_{\mu\nu} = U_{\nu\mu}, \quad (2.15)$$

onde das 16 componentes, devido à simetria, temos 10 componentes independentes.

Dizemos que um tensor é antissimétrico em relação a um conjunto de índices, quando na permutação de dois índices desse conjunto, temos como resultado o mesmo tensor, mas com sinal invertido. Para um tensor antissimétrico de segunda ordem, vale a relação

$$U_{\mu\nu} = -U_{\nu\mu}, \quad (2.16)$$

e devido à antissimetria, temos apenas 6 componentes independentes.

## 2.2 DERIVADA COVARIANTE

Se aplicarmos uma derivada parcial em um tensor, obtemos um objeto de ordem mais alta, a saber,  $\partial_\nu A_\mu$ . No espaço-tempo plano, esse objeto ainda seria um tensor se as relações entre as coordenadas utilizadas forem lineares. Num espaço-tempo curvo, ou quando estamos utilizando coordenadas curvilíneas, a simples derivada de um tensor não será outro tensor. Vamos ver o que acontece quando se deriva um tensor e se examina sua lei de transformação entre dois sistemas de coordenadas. Um tensor de primeira ordem segue a lei de transformação

$$U'_{\eta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\eta}} U_{\mu}. \quad (2.17)$$

Tomando a derivada parcial desse tensor em relação à  $x'$ , temos que a transformação é dada por

$$\frac{\partial U'^\eta}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\eta} \frac{\partial U_\mu}{\partial x'^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\eta \partial x'^\lambda} U_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\eta} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial U_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\eta \partial x'^\lambda} U_\mu. \quad (2.18)$$

Agora, se as relações entre as coordenadas são lineares, as derivadas de segunda ordem da relação anterior são iguais a zero e portanto essa transformação seria uma transformação tensorial. Se porém, as relações não são lineares, as derivadas de segunda ordem não são zero, e a transformação já não resulta mais em um tensor.

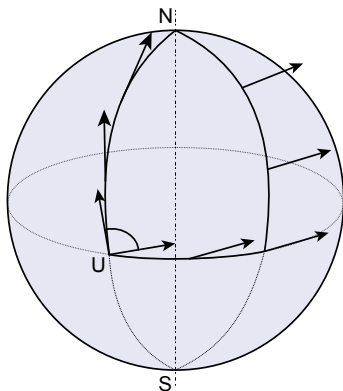
De um outro ponto de vista, da definição de derivada parcial aplicada em um vetor

$$\frac{\partial U_\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{U_\mu(x + dx) - U_\nu(x)}{dx^\nu}, \quad (2.19)$$

vemos que o numerador da expressão não é um vetor, pois é dado pela diferença entre dois vetores em pontos diferentes, e a lei de transformação dos tensores depende da posição. Para obtermos um numerador que seja um vetor, devemos fazer um transporte paralelo do vetor  $A_\mu$  de  $x$  para  $x + dx$  antes de fazer a subtração, afim de fazer com que os dois vetores estejam no mesmo ponto.

O transporte paralelo de um vetor acontece de forma que ele mantenha sua orientação inicial, de seu ponto de vista, ao longo de seu transporte em uma curva qualquer. Um exemplo de transporte paralelo é mostrado na figura 1.

Figura 1 – O transporte paralelo



O transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva sobre a superfície de uma esfera.

Visto de longe, numa posição privilegiada como a da figura 1, o vetor muda de orientação, mas como já foi mencionado, a orientação a ser mantida é a orientação do ponto de vista do vetor que está sobre a superfície curva da esfera, como se lá estivessemos caminhando segurando uma seta e mantendo-a apontada sempre na mesma direção.

A derivada covariante utiliza o transporte paralelo para aplicar a diferenciação em um tensor de modo que tenhamos como resultado outro tensor. Denotamos a derivada covariante por um ponto e vírgula e sua definição para vetores contravariantes é

$$U^\mu{}_{;\nu} = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\eta\nu} U^\eta, \quad (2.20)$$

onde o termo

$$\Gamma^\mu_{\eta\nu} U^\eta \quad (2.21)$$

é a correção em relação à derivada parcial ordinária devido à curvatura do espaço-tempo. O símbolo  $\Gamma^\mu_{\nu\eta}$  é denominado símbolo de

Christoffel, que caracteriza o transporte paralelo no espaço-tempo considerado e é definido como

$$\Gamma^\mu_{\nu\eta} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\eta} + \frac{\partial g_{\alpha\eta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\eta}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (2.22)$$

Para vetores covariantes, a derivada covariante toma a seguinte forma:

$$U_{\mu;\nu} = \frac{\partial U_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\eta_{\mu\nu} U_\eta. \quad (2.23)$$

Por fim, a definição geral da derivada covariante para tensores de qualquer ordem é dada pela expressão

$$\begin{aligned} U_{j_1 \dots j_n; k}^{i_1 \dots i_m} &= \frac{\partial U_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}}{\partial x^k} \\ &+ \Gamma^{i_1}_{lk} U_{j_1 \dots j_n}^{l \dots i_m} + \dots + \Gamma^{i_m}_{lk} U_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_{m-1} l} \\ &- \Gamma^l_{j_1 k} U_{l \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} - \dots - \Gamma^l_{j_n k} U_{j_1 \dots j_{n-1} l}^{i_1 \dots i_m}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

## 2.3 EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

Vamos começar a tratar da teoria da relatividade geral em si diretamente pelas equações de campo de Einstein, com a dívida de uma explanação sobre a origem das mesmas em prol da brevidade e foco de nossos propósitos neste trabalho. Tratamentos mais detalhados podem ser encontrados em Ohanian e Ruffini (2013), d’Inverno (1992), Weinberg (1972) e Wald (2010).

As unidades utilizadas aqui e em todo o trabalho fazem parte do sistema cgs-Gaussiano geometrizado, isto é, com a velocidade da luz  $c$  e a constante gravitacional  $G$  iguais à unidade. No sistema geometrizado, todas as quantidades físicas terão como dimensão alguma potência da dimensão de comprimento, em centímetros.

As equações de campo são equações diferenciais que determinam as funções desconhecidas (declaradas no tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ )

a serem encontradas dada uma distribuição de massa e energia no espaço-tempo. Essas equações geralmente são difíceis de se resolver analiticamente (muitas vezes de segunda ordem, não lineares, acopladas e não homogêneas). As equações de campo de Einstein, sob a forma de uma equação tensorial, são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é chamado de tensor de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico,  $R$  o escalar de Ricci,  $G$  a constante gravitacional,  $c$  a velocidade da luz no vácuo e  $T_{\mu\nu}$  o tensor de energia-momento. Como estamos trabalhando em coordenadas geometrizadas, temos que  $G = 1$  e  $c = 1$  e portanto

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

Essa equação tensorial envolve tensores simétricos de segunda ordem, ou seja com dez componentes independentes cada um. Segundo d’Inverno (1992, p. 169), podemos interpretar essas equações de três possíveis formas:

1. As equações de campo são equações que determinam a métrica  $g_{\mu\nu}$  para um dado tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$ , ou seja, estamos lendo as equações da direita para a esquerda, onde tentamos descobrir a geometria do espaço-tempo dada uma distribuição de matéria e radiação.
2. As equações de campo são equações que determinam um tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  dada uma determinada geometria do espaço-tempo. Neste caso estamos lendo as equações de campo da esquerda para a direita.
3. As equações de campo são equações que conectam vinte quantidades (dez componentes do tensor métrico e dez componentes



do tensor energia-momento). Deste ponto de vista não privilegiamos nenhum dos lados das equações, mas apenas observamos que essas equações determinam vínculos a serem satisfeitos nas escolhas simultâneas de  $g_{\mu\nu}$  e  $T_{\mu\nu}$ .

Examinaremos agora cada um dos componentes das equações de Einstein individualmente.

### 2.3.1 O tensor métrico

O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  é o objeto principal da relatividade geral e contém todas as informações a respeito da geometria do espaço-tempo. Ele é um tensor simétrico definido em termos do intervalo  $ds^2$  entre dois pontos no espaço-tempo, separados por um deslocamento infinitesimal  $dx^\mu$ :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.27)$$

Assim como distâncias no espaço euclidiano, o intervalo  $ds^2$  nada mais é do que a separação infinitesimal entre dois eventos não somente no espaço, mas também no tempo, e é um invariante, ou seja, dado um conjunto qualquer de observadores, todos obterão o mesmo valor para o intervalo  $ds^2$ .

A assinatura do tensor métrico se refere aos sinais das componentes espaciais e da componente temporal do tensor métrico. A assinatura  $(-, +, +, +)$ , que será utilizada durante todo este trabalho, significa que temos um sinal negativo para a componente  $g_{11}$  do tensor métrico (a parte temporal) e sinais positivos para as componentes  $g_{22}$ ,  $g_{33}$  e  $g_{44}$  (componentes espaciais do tensor métrico). Independentemente da assinatura da métrica, que altera os sinais das definições de alguns outros tensores na relatividade geral, devemos obter no final sempre as mesmas equações de campo de Einstein.

Um exemplo de tensor métrico é o tensor métrico de Schwarzschild, correspondente à primeira solução (não trivial) das equações de Einstein e que representa o espaço-tempo externo a uma massa esférica  $m$ :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2m}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

onde  $r$  e  $\theta$  são coordenadas esféricas, ou coordenadas de Schwarzschild.

A métrica na qual focaremos nossos esforços mais à frente é uma métrica com simetria axial, chamada de métrica de Weyl, que se apresenta como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(\rho, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{2h(\rho, z)}}{f(\rho, z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{2h(\rho, z)}}{f(\rho, z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^2}{f(\rho, z)} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

onde  $\rho$  e  $z$  são coordenadas cilíndricas, ou coordenadas de Weyl. As funções  $f(\rho, z)$  e  $h(\rho, z)$  são funções que determinam a solução do problema físico.

A forma contravariante do tensor métrico, a saber,  $g^{\mu\nu}$ , é definida por

$$g_{\mu\eta}g^{\eta\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad (2.30)$$

onde  $\delta_\nu^\mu$  é conhecido como delta de Kronecker:

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu = \nu \\ 0, & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases}. \quad (2.31)$$

Isso posto, é fácil verificar que

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g_{\mu}^{\mu} = 4. \quad (2.32)$$

### 2.3.2 O tensor de curvatura de Riemann

O tensor de curvatura de Riemann  $R^{\mu}{}_{\nu\eta\lambda}$  é definido em termos dos símbolos de Christoffel:

$$R^{\mu}{}_{\nu\eta\lambda} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}{}_{\eta\alpha} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\eta}. \quad (2.33)$$

Se abaixarmos o primeiro índice do tensor de curvatura de Riemann, transformando-o num tensor covariante

$$g_{\mu\gamma} R^{\gamma}{}_{\nu\eta\lambda} = R_{\mu\nu\eta\lambda}, \quad (2.34)$$

obtemos algumas identidades interessantes:

$$R_{\mu\nu\eta\lambda} + R_{\nu\mu\eta\lambda} = 0, \quad (2.35)$$

$$R_{\mu\nu\eta\lambda} + R_{\mu\nu\lambda\eta} = 0, \quad (2.36)$$

$$R_{\mu\nu\eta\lambda} - R_{\nu\mu\lambda\eta} = 0, \quad (2.37)$$

$$R_{\mu\nu\eta\lambda} + R_{\mu\eta\lambda\nu} + R_{\mu\lambda\nu\eta} = 0. \quad (2.38)$$

Essas identidades levam o tensor de curvatura de Riemann de 256 componentes ( $4 \times 4 \times 4 \times 4$ ) para apenas 20 componentes independentes.

Uma outra identidade importante que envolve o tensor de curvatura de Riemann é

$$R^{\mu}{}_{\nu\eta\lambda;\gamma} + R^{\mu}{}_{\nu\lambda\gamma;\eta} + R^{\mu}{}_{\nu\gamma\eta;\lambda} = 0. \quad (2.39)$$

### 2.3.3 O tensor de curvatura de Ricci

O tensor de curvatura de Ricci  $R_{\mu\nu}$  é um tensor simétrico de segunda ordem e é definido como uma contração do tensor de curvatura de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}. \quad (2.40)$$

Uma identidade importante a respeito desse tensor é dada pela equação diferencial

$$\left( R^\mu_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^\mu_{\nu} R \right)_{;\mu} = 0. \quad (2.41)$$

As identidades (2.39) e (2.41) são conhecidas como identidades de Bianchi.

### 2.3.4 O escalar de Ricci

O escalar de Ricci  $R$  é um invariante resultante de uma contração do tensor de Ricci:

$$R = R_\mu{}^\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.42)$$

No contexto da relatividade geral, podemos calcular o escalar de Ricci a partir das equações de Einstein. Primeiramente, subimos um dos índices de todos os tensores da equação (2.26) multiplicando por  $g^{\mu\nu}$ :

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = 8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

obtendo

$$R_\mu{}^\mu - \frac{1}{2} g_\mu{}^\mu R = 8\pi T_\mu{}^\mu. \quad (2.44)$$

Como temos índices repetidos, devemos contraí-los, gerando o escalar de Ricci  $R$  e o escalar  $T$ , resultado da contração do tensor

energia-momento  $T_\mu{}^\mu$ :

$$R - \frac{1}{2}4R = 8\pi T, \quad (2.45)$$

e por fim

$$R = -8\pi T. \quad (2.46)$$

### 2.3.5 O tensor de energia-momento

O tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$  descreve a densidade e o fluxo de energia e momento no espaço-tempo. Não existe uma definição geral deste tensor, visto que cada caso é um caso particular de distribuição de massa e energia ao qual temos interesse em resolver. Existem entretanto tensores que representam certas situações físicas, como por exemplo o tensor de energia-momento de um fluido perfeito e o tensor de energia-momento do campo eletromagnético.

O tensor de energia-momento eletromagnético é de especial interesse neste trabalho (pois teremos um campo magnético de dipolo no espaço-tempo de nosso problema). Ele é um tensor simétrico, definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (2.47)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é chamado de tensor eletromagnético, que descreve o campo eletromagnético de um sistema físico.

A contração do tensor de energia-momento eletromagnético é igual a zero:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} &= T_\mu{}^\mu \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha} g^{\mu\nu} F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha} - F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Terminamos aqui a explanação dos elementos da relatividade geral necessários para os cálculos deste trabalho. Seguiremos com uma breve passagem pelo eletromagnetismo em sua forma tensorial, que junto com a relatividade geral, determinam todas as equações que necessitaremos em nosso problema.

## 2.4 EQUAÇÕES DE CAMPO DO ELETROMAGNETISMO

As equações de campo de Einstein, em um espaço-tempo que envolve um tensor eletromagnético, não determinam sozinhas a solução do problema físico. São necessárias além das equações de Einstein, as equações de Maxwell, que nada mais são do que as equações de campo do eletromagnetismo. As equações de Maxwell em sua forma tensorial se resumem em duas equações, a saber, a equação de Gauss-Faraday e a equação de Gauss-Ampère:

$$F_{\mu\nu;\eta} + F_{\nu\eta;\mu} + F_{\eta\mu;\nu} = 0, \quad (2.49)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 4\pi J^\nu, \quad (2.50)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é tensor o eletromagnético e  $J^\nu$  é a quadricorrente.

A equação tensorial de Gauss-Faraday combina a lei de Gauss para o campo magnético e a lei da indução de Faraday. Já a equação tensorial de Gauss-Ampère combina a lei de Gauss para o campo elétrico e a lei Ampère. As derivadas ordinárias foram substituídas por derivadas covariantes, pois estamos em um espaço-tempo curvo.

O tensor eletromagnético  $F_{\mu\nu}$  é um tensor antissimétrico, tendo somente seis componentes independentes. A sua relação com as com-

ponentes dos campos elétrico e magnético é definida por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

O tensor eletromagnético também pode ser definido em termos do quadripotencial eletromagnético  $A_\mu$  através de

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (2.52)$$

onde o quadripotencial eletromagnético é um quadrivetor que encapsula o potencial elétrico  $\phi$  e o potencial vetor magnético  $\vec{a}$  na forma

$$A_\mu = (\phi, \vec{a}) = (\phi, a_1, a_2, a_3). \quad (2.53)$$

Por fim, a quadricorrente  $J^\nu$  engloba a densidade de carga  $\psi$  e a densidade de corrente  $\vec{j}$ :

$$J^\mu = (\psi, \vec{j}) = (\psi, j_1, j_2, j_3). \quad (2.54)$$

Com as equações de campo de Einstein e as equações de campo de Maxwell, temos agora todos os elementos necessários para a investigação de uma solução que será apresentada mais adiante: o espaço-tempo de um dipolo magnético.





### 3 ESPAÇO-TEMPO COM SIMETRIA AXIAL

Vamos neste capítulo elucidar alguns pontos a respeito dos espaço-tempo com simetria axial, objeto de estudo deste trabalho. A métrica importante nesse caso é a chamada métrica de Weyl (WEYL, 1917; WEYL, 1919; BACH, 1922)<sup>1</sup>, dada pelo elemento de linha da forma

$$ds^2 = -f(\rho, z)dt^2 + \frac{e^{2h(\rho, z)}}{f(\rho, z)}d\rho^2 + \frac{e^{2h(\rho, z)}}{f(\rho, z)}dz^2 + \frac{\rho^2}{f(\rho, z)}d\varphi^2, \quad (3.1)$$

onde  $t$ ,  $\rho$ ,  $z$  e  $\varphi$  são coordenadas cilíndricas, ou coordenadas de Weyl<sup>2</sup>. As funções  $f(\rho, z)$  e  $h(\rho, z)$  determinam a solução do problema.

As coordenadas de Weyl variam nos seguintes intervalos:

$$t \in (-\infty, \infty), \quad (3.2)$$

$$\rho \in [0, \infty), \quad (3.3)$$

$$z \in (-\infty, \infty), \quad (3.4)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi). \quad (3.5)$$

Utilizaremos essa métrica com simetria axial pois estudaremos um espaço-tempo que contém um campo magnético de dipolo. Esse campo magnético possui simetria axial e portanto as equações de campo na métrica de Weyl referente à esse cenário se apresentam de forma mais simples do que em uma métrica que não possua essa simetria.

<sup>1</sup> Tradução em inglês: Weyl (2012a), Weyl (2012b), Bach e Weyl (2012).

<sup>2</sup> As coordenadas da métrica de Weyl, em outras situações fora do escopo deste trabalho, podem não ter a interpretação de coordenadas cilíndricas (GRIFFITHS; PODOLSKÝ, 2009, p. 170).

Na métrica de Weyl, as equações diferenciais de campo para os casos de vácuo e eletrovácuo não são lineares, mas são integráveis (GRIFFITHS; PODOLSKÝ, 2009, p. 238). Um espaço-tempo do tipo eletrovácuo nada mais é do que o espaço-tempo de uma região preenchida somente com campos eletromagnéticos, sem massas, cargas ou correntes. Nosso interesse final neste trabalho é em uma solução de eletrovácuo magnético.

### 3.1 O ELETROVÁCUO NA MÉTRICA DE WEYL

Vamos aqui calcular as equações de campo de Einstein e de Maxwell para um espaço-tempo geral do tipo eletrovácuo, com simetria axial na métrica de Weyl, que contém os campos elétrico e magnético. Esse desenvolvimento é feito com o objetivo de, no próximo capítulo, estudarmos um caso particular desse espaço-tempo, onde temos somente o campo magnético.

O tensor métrico que usaremos é dado pelo elemento de linha de Weyl (3.1):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(\rho, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{2h(\rho, z)}}{f(\rho, z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{2h(\rho, z)}}{f(\rho, z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^2}{f(\rho, z)} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Buscamos uma solução em uma região do espaço-tempo preenchida somente por campo eletromagnético, logo, nosso tensor energia-momento é

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (3.7)$$

O quadripotencial eletromagnético envolve os potenciais dos campos elétrico e magnético. Para o potencial vetor magnético é necessário somente a componente na direção  $\hat{\varphi}$ , dada por  $a(\rho, z)$ , para

gerarmos um campo magnético com simetria axial (GRIFFITHS; PODOLSKÝ, 2009, p. 253). Temos então que

$$A_\mu = (\phi, \vec{a}) = (\phi(\rho, z), 0, 0, a(\rho, z)). \quad (3.8)$$

A partir desse quadripotencial, podemos calcular o tensor eletromagnético  $F_{\mu\nu}$ , e em seguida o tensor energia-momento eletromagnético  $T_{\mu\nu}$ .

A quadricorrente, presente nas equações de campo de Maxwell, deve ser nula, pois como não temos cargas e nem correntes na região do espaço-tempo em que buscamos uma solução, as respectivas densidades de carga  $\psi$  e de corrente  $\vec{j}$  são iguais a zero:

$$J^\mu = (\psi, \vec{j}) = (0, 0, 0, 0). \quad (3.9)$$

As equações de Einstein neste caso de eletrovácuo podem ser escritas de uma forma resumida. Vimos que a contração do tensor energia-momento eletromagnético é sempre zero:

$$T_\mu{}^\mu = T = 0, \quad (3.10)$$

e vimos também que o escalar de Ricci pode ser escrito da forma

$$R = -8\pi T, \quad (3.11)$$

logo, temos que o escalar de Ricci também é zero. Substituindo  $R = 0$  nas equações de Einstein (2.26), temos

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

Com essas definições temos todos os elementos que caracterizam nosso espaço-tempo. Podemos agora calcular as equações de campo Einstein e as equações de campo Maxwell, também conhecidas conjuntamente como equações de Einstein-Maxwell. As equações de Einstein para o caso eletrovácuo geral na métrica de Weyl

onde temos simetria axial se apresentam como

$$\begin{aligned}
 0 = & 4 \left( \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial a}{\partial \rho} \right)^2 \right) f^3 + 4\rho^2 \left( \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \right. \\
 & \left. \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2} \right) f^2 + 4\rho \left( \rho \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \right) - \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) f + 5\rho^2 \left( \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right), \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial a}{\partial \rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
 0 = & 4 \left( \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial a}{\partial \rho} \right)^2 \right) f^3 \\
 & + 4\rho \frac{\partial h}{\partial \rho} f^2 + 4\rho^2 \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) f \\
 & + \rho^2 \left( \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right), \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

$$0 = 2f\rho \left( f \frac{\partial h}{\partial z} + 2\rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) - 4 \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial \rho} f^3 + \rho^2 \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 0 = & 4 \left( \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial a}{\partial \rho} \right)^2 \right) f^3 + 4\rho^2 \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)^2 \right) f - \rho^2 \left( 4 \left( \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2} \right) f^2 \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right), \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

e as equações de Maxwell resultantes são

$$0 = \rho \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} - f \left( \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \rho \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} \right) \right), \quad (3.18)$$

$$0 = f \left( \rho \left( \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial \rho^2} \right) - \frac{\partial a}{\partial \rho} \right) + \rho \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} + \rho \frac{\partial a}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial \rho}. \quad (3.19)$$

Temos então sete equações diferenciais parciais, acopladas, de segunda ordem, não lineares, onde devemos encontrar as funções  $f(\rho, z)$ ,  $h(\rho, z)$ ,  $\phi(\rho, z)$  e  $a(\rho, z)$  que as satisfaçam.

No próximo capítulo iremos aplicar esses resultados para o nosso caso de interesse, que é estudo do espaço-tempo de um dipolo magnético.



## 4 O ESPAÇO-TEMPO DE UM DIPOLO MAGNÉTICO

O espaço-tempo que iremos estudar contém um campo magnético de dipolo, sem fontes eletromagnéticas (cargas e correntes).

Primeiramente calcularemos as equações de campo de Einstein e as equações de Maxwell, na métrica de Weyl, para um espaço-tempo com simetria axial, onde é pressuposta a existência de um quadripotencial  $A_\mu$ , com somente a componente azimutal não nula. Essa suposição é suficiente para a obtenção de uma solução que representa um campo magnético de dipolo.

A seguir, estudaremos uma solução exata (GUTSUNAEV; MANKO, 1987)<sup>1</sup> das equações obtidas anteriormente, que contempla uma massa de raio tamanho infinitesimal localizada na origem, com um campo magnético de dipolo. A partir dessa solução original, calcularemos então a solução exata quando o momento de dipolo magnético tende a zero e a solução exata quando a massa tende a zero. Estudaremos o comportamento e a forma da métrica das soluções em todos os três casos.

### 4.1 EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

Nos cálculos utilizaremos o sistema de unidades cgs-Gaussiano geometrizado, onde a velocidade da luz é dada por  $c = 1$  e a constante gravitacional por  $G = 1$ .

Dada a coordenada temporal  $t$  e as coordenadas espaciais  $\rho$ ,  $z$  e  $\varphi$ , definimos a tupla de coordenadas de Weyl da forma

$$x^\mu = (t, \rho, z, \varphi), \quad (4.1)$$

e a assinatura da métrica como

$$(-, +, +, +). \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup> Em (POLANCO; LETELIER; UJEVIC, 2008), a construção de uma solução semelhante é estudada em detalhes. A ideia principal que determina a solução que estamos estudando é apresentada no apêndice A.

Considerando o elemento de linha de Weyl

$$ds^2 = -f(\rho, z)dt^2 + \frac{e^{2h(\rho, z)}}{f(\rho, z)}d\rho^2 + \frac{e^{2h(\rho, z)}}{f(\rho, z)}dz^2 + \frac{\rho^2}{f(\rho, z)}d\varphi^2, \quad (4.3)$$

definimos o tensor métrico de nosso problema por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(\rho, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{2h(\rho, z)}}{f(\rho, z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{2h(\rho, z)}}{f(\rho, z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^2}{f(\rho, z)} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

onde as funções  $f(\rho, z)$  e  $h(\rho, z)$  são funções desconhecidas a serem determinadas.

Calcularemos agora os elementos  $R_{\mu\nu}$ ,  $R$  e  $T_{\mu\nu}$  das equações de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

Primeiramente, vamos obter o tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . A partir de um quadripotencial eletromagnético  $A_\mu$  da forma

$$A_\mu = (0, 0, 0, a(\rho, z)), \quad (4.6)$$

onde  $a(\rho, z)$  é a componente azimutal do potencial vetor magnético, podemos calcular o tensor eletromagnético  $F_{\mu\nu}$  através da definição

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (4.7)$$

que resulta em

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial a(\rho, z)}{\partial \rho} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial a(\rho, z)}{\partial z} \\ 0 & -\frac{\partial a(\rho, z)}{\partial \rho} & -\frac{\partial a(\rho, z)}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$



Para fins de simplificação de notação, após a definição de uma função, não serão mais mostrados os seus argumentos, exceto quando houver uma mudança de coordenadas ou se mostrar necessário no desenvolvimento dos cálculos.

Agora, através da definição do tensor de energia-momento eletromagnético

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (4.9)$$

temos que os elementos não nulos são

$$T_{tt} = \frac{e^{-2h} f^3 \left( \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial a}{\partial \rho} \right)^2 \right)}{8\pi\rho^2}, \quad (4.10)$$

$$T_{\rho\rho} = \frac{f \left( \left( \frac{\partial a}{\partial \rho} \right)^2 - \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 \right)}{8\pi\rho^2}, \quad (4.11)$$

$$T_{\rho z} = \frac{f \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial \rho}}{4\pi\rho^2}, \quad (4.12)$$

$$T_{z\rho} = \frac{f \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial \rho}}{4\pi\rho^2}, \quad (4.13)$$

$$T_{zz} = \frac{f \left( \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial a}{\partial \rho} \right)^2 \right)}{8\pi\rho^2}, \quad (4.14)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \frac{e^{-2h} f \left( \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial a}{\partial \rho} \right)^2 \right)}{8\pi}. \quad (4.15)$$

O próximo passo é calcular o tensor de curvatura de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , que é uma contração do tensor de curvatura de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}. \quad (4.16)$$

O tensor de curvatura de Riemann  $R^{\mu}_{\nu\eta\lambda}$ , definido em termos dos símbolos de Christoffel, é

$$R^{\mu}_{\nu\eta\lambda} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\eta}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\eta\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu\eta}, \quad (4.17)$$

e os símbolos de Christoffel são definidos por

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\eta} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\eta}} + \frac{\partial g_{\alpha\eta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\eta}}{\partial x^{\alpha}} \right). \quad (4.18)$$

Utilizando o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , obtemos os seguintes símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^t_{t\rho} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{2f}, \quad (4.19)$$

$$\Gamma^t_{tz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{2f}, \quad (4.20)$$

$$\Gamma^t_{\rho t} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{2f}, \quad (4.21)$$

$$\Gamma^t_{zt} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{2f}, \quad (4.22)$$

$$\Gamma^{\rho}_{tt} = \frac{1}{2} e^{-2h} f \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad (4.23)$$

$$\Gamma^{\rho}_{\rho\rho} = \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{2f}, \quad (4.24)$$

$$\Gamma^\rho{}_{\rho z} = \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{2f}, \quad (4.25)$$

$$\Gamma^\rho{}_{z\rho} = \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{2f}, \quad (4.26)$$

$$\Gamma^\rho{}_{zz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{2f} - \frac{\partial h}{\partial \rho}, \quad (4.27)$$

$$\Gamma^\rho{}_{\varphi\varphi} = \frac{e^{-2h}\rho\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho} - 2f\right)}{2f}, \quad (4.28)$$

$$\Gamma^z{}_{tt} = \frac{1}{2}e^{-2h}f\frac{\partial f}{\partial z}, \quad (4.29)$$

$$\Gamma^z{}_{\rho\rho} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{2f} - \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (4.30)$$

$$\Gamma^z{}_{\rho z} = \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{2f}, \quad (4.31)$$

$$\Gamma^z{}_{z\rho} = \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{2f}, \quad (4.32)$$

$$\Gamma^z{}_{zz} = \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{2f}, \quad (4.33)$$

$$\Gamma^z{}_{\varphi\varphi} = \frac{e^{-2h}\rho^2\frac{\partial f}{\partial z}}{2f}, \quad (4.34)$$

$$\Gamma^\varphi{}_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{2f}, \quad (4.35)$$

$$\Gamma^\varphi_{z\varphi} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{2f}, \quad (4.36)$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi\rho} = \frac{1}{\rho} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{2f}, \quad (4.37)$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{2f}. \quad (4.38)$$

Aplicando estes símbolos de Christoffel na equação (4.17), obtemos as componentes do tensor de Riemann:

$$R^t_{\rho t \rho} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - 2f \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} + 2f \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right)}{4f^2}, \quad (4.39)$$

$$R^t_{\rho t z} = \frac{2f \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} - 2f \frac{\partial h}{\partial \rho}\right)}{4f^2}, \quad (4.40)$$

$$R^t_{\rho \rho t} = \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + 2f \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} + 2f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} - \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial \rho}\right)}{4f^2}, \quad (4.41)$$

$$R^t_{\rho z t} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} - 2f \frac{\partial h}{\partial \rho}\right) + 2f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z}\right)}{4f^2}, \quad (4.42)$$

$$R^t_{z t \rho} = \frac{2f \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} - 2f \frac{\partial h}{\partial \rho}\right)}{4f^2}, \quad (4.43)$$

$$R^t_{z t z} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 + 2f \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial \rho}\right)}{4f^2}, \quad (4.44)$$

$$R^t_{z\rho t} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} - 2f \frac{\partial h}{\partial \rho} \right) + 2f \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} \right)}{4f^2}, \quad (4.45)$$

$$R^t_{zzt} = -\frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 - 2f \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial \rho} \right)}{4f^2}, \quad (4.46)$$

$$R^t_{\varphi t \varphi} = \frac{e^{-2h} \rho \left( \rho \left( \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right) - 2f \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)}{4f^2}, \quad (4.47)$$

$$R^t_{\varphi \varphi t} = -\frac{e^{-2h} \rho \left( \rho \left( \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right) - 2f \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)}{4f^2}, \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} R^\rho_{tt\rho} &= \frac{1}{4} e^{-2h} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2} e^{-2h} f \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-2h} f \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \right), \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} R^\rho_{ttz} &= \frac{1}{2} e^{-2h} f \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} e^{-2h} \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} - 2f \frac{\partial h}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} R^\rho_{t\rho t} &= -\frac{1}{4} e^{-2h} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} e^{-2h} f \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-2h} f \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} - \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} R^\rho_{tzt} &= \frac{1}{4} e^{-2h} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} - 2f \frac{\partial h}{\partial \rho} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2f \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$R^\rho{}_{z\rho z} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{2f^2} - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}{2f^2} + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}}{2f} - \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2}, \quad (4.53)$$

$$R^\rho{}_{zz\rho} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{2f^2} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}{2f^2} - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}}{2f} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2}, \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} R^\rho{}_{\varphi\rho\varphi} = & -\frac{e^{-2h}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\rho^2}{4f^2} - \frac{e^{-2h}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2\rho^2}{2f^2} \\ & + \frac{e^{-2h}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\rho^2}{2f} + \frac{e^{-2h}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial z}\rho^2}{2f} \\ & + e^{-2h}\frac{\partial h}{\partial \rho}\rho + \frac{e^{-2h}\frac{\partial f}{\partial \rho}\left(1 - \rho\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)\rho}{2f}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} R^\rho{}_{\varphi z\varphi} = & -\frac{e^{-2h}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \rho}\rho^2}{4f^2} \\ & - \frac{e^{-2h}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho\partial z}\right)\rho^2}{2f} \\ & + e^{-2h}\frac{\partial h}{\partial z}\rho, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} R^\rho{}_{\varphi\varphi\rho} = & \frac{e^{-2h}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\rho^2}{4f^2} + \frac{e^{-2h}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2\rho^2}{2f^2} \\ & - \frac{e^{-2h}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\rho^2}{2f} - \frac{e^{-2h}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial z}\rho^2}{2f} \\ & - e^{-2h}\frac{\partial h}{\partial \rho}\rho - \frac{e^{-2h}\frac{\partial f}{\partial \rho}\left(1 - \rho\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)\rho}{2f}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned}
R^\rho{}_{\varphi\varphi z} &= \frac{e^{-2h} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho} \rho^2}{4f^2} \\
&+ \frac{e^{-2h} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z} \right) \rho^2}{2f} \\
&- e^{-2h} \frac{\partial h}{\partial z} \rho,
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
R^z{}_{tt\rho} &= \frac{1}{2} e^{-2h} f \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z} \right) \\
&- \frac{1}{4} e^{-2h} \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} - 2f \frac{\partial h}{\partial \rho} \right),
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
R^z{}_{ttz} &= \frac{1}{4} e^{-2h} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 + 2f \right. \\
&\left. \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial \rho} \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
R^z{}_{t\rho t} &= \frac{1}{4} e^{-2h} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} - 2f \frac{\partial h}{\partial \rho} \right) \right. \\
&\left. + 2f \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
R^z{}_{tzt} &= \frac{1}{4} e^{-2h} \left( 2f \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial \rho} \right) - \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right),
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$R^z{}_{\rho\rho z} = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}{2f^2} + \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2}{2f^2} - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}}{2f} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2}, \tag{4.63}$$

$$R^z_{\rho z \rho} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{2f^2} - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}{2f^2} + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}}{2f} - \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2}, \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} R^z_{\varphi \rho \varphi} = & -\frac{e^{-2h} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho} \rho^2}{4f^2} \\ & - \frac{e^{-2h} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z} \right) \rho^2}{2f} \\ & + e^{-2h} \frac{\partial h}{\partial z} \rho, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} R^z_{\varphi z \varphi} = & -\frac{e^{-2h} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \rho^2}{2f^2} - \frac{e^{-2h} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 \rho^2}{4f^2} \\ & - \frac{e^{-2h} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} \rho^2}{2f} - e^{-2h} \frac{\partial h}{\partial \rho} \rho \\ & + \frac{e^{-2h} \left( \rho \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial h}{\partial \rho} + 1 \right) \right) \rho}{2f}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} R^z_{\varphi \varphi \rho} = & \frac{e^{-2h} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho} \rho^2}{4f^2} \\ & + \frac{e^{-2h} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z} \right) \rho^2}{2f} \\ & - e^{-2h} \frac{\partial h}{\partial z} \rho, \end{aligned} \quad (4.67)$$



$$\begin{aligned}
R^z_{\varphi\varphi z} = & \frac{e^{-2h} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \rho^2}{2f^2} + \frac{e^{-2h} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \rho^2}{4f^2} \\
& + \frac{e^{-2h} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} \rho^2}{2f} + e^{-2h} \frac{\partial h}{\partial \rho} \rho \\
& - \frac{e^{-2h} \left( \rho \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial h}{\partial \rho} + 1 \right) \right) \rho}{2f},
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$R^\varphi_{tt\varphi} = \frac{e^{-2h} \left( \rho \left( \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right) - 2f \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)}{4\rho}, \tag{4.69}$$

$$R^\varphi_{t\varphi t} = \frac{e^{-2h} \left( 2f \frac{\partial f}{\partial \rho} - \rho \left( \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right) \right)}{4\rho}, \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
R^\varphi_{\rho\rho\varphi} = & \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}{4f^2} - \frac{\frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}}{2f} + \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2}{2f^2} \\
& - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}}{2f} - \frac{\frac{\partial h}{\partial \rho}}{\rho} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho} \left( 1 - \rho \frac{\partial h}{\partial \rho} \right)}{2f\rho},
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$R^\varphi_{\rho z\varphi} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho}}{4f^2} - \frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{\rho} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z}}{2f}, \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
R^\varphi_{\rho\varphi\rho} = & -\frac{\left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}{4f^2} + \frac{\frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}}{2f} - \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2}{2f^2} \\
& + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}}{2f} + \frac{\frac{\partial h}{\partial \rho}}{\rho} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho} \left( 1 - \rho \frac{\partial h}{\partial \rho} \right)}{2f\rho},
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$R^\varphi_{\rho\varphi z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho}}{4f^2} + \frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{\rho} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z}}{2f}, \tag{4.74}$$

$$R^\varphi_{z\rho\varphi} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho}}{4f^2} - \frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{\rho} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z}}{2f}, \quad (4.75)$$

$$R^\varphi_{zz\varphi} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{2f^2} + \frac{\frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}}{2f} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}{4f^2} \\ + \frac{\frac{\partial h}{\partial \rho}}{\rho} - \frac{\rho \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial h}{\partial \rho} + 1\right)}{2f\rho}, \quad (4.76)$$

$$R^\varphi_{z\varphi\rho} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho}}{4f^2} + \frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{\rho} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial z}}{2f}, \quad (4.77)$$

$$R^\varphi_{z\varphi z} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{2f^2} - \frac{\frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}}{2f} - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}{4f^2} \\ - \frac{\frac{\partial h}{\partial \rho}}{\rho} + \frac{\rho \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial h}{\partial \rho} + 1\right)}{2f\rho}. \quad (4.78)$$

Substituindo estas componentes do tensor de Riemann na equação (4.16), obtemos as componentes do tensor de Ricci:

$$R_{tt} = -\frac{1}{2}e^{-2h} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{2}e^{-2h} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 \\ + \frac{e^{-2h} f \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} + \rho \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right)\right)}{2\rho}, \quad (4.79)$$

$$R_{\rho\rho} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{2f^2} - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}{f^2} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho} + \rho \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right)}{2f\rho} \\ - \frac{\rho \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2}\right) - \frac{\partial h}{\partial \rho}}{\rho}, \quad (4.80)$$

$$R_{\rho z} = \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad (4.81)$$

$$R_{z\rho} = \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad (4.82)$$

$$R_{zz} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{f^2} - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}{2f^2} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \rho} + \rho\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right)}{2f\rho} - \frac{\frac{\partial h}{\partial \rho} + \rho\left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2}\right)}{\rho}, \quad (4.83)$$

$$R_{\varphi\varphi} = -\frac{e^{-2h}\rho^2\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{2f^2} - \frac{e^{-2h}\rho^2\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}{2f^2} + \frac{e^{-2h}\rho\left(\frac{\partial f}{\partial \rho} + \rho\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right)\right)}{2f}. \quad (4.84)$$

Agora, o escalar de Ricci  $R$  é simplesmente uma contração do tensor de Ricci:

$$R = R_{\mu}{}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (4.85)$$

Calculando-o, temos

$$R = -\frac{3e^{-2h}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}{2f} + \frac{e^{-2h}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho} + \rho\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\right)}{\rho} - 2fe^{-2h}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right) - \frac{3e^{-2h}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{2f}. \quad (4.86)$$

Em posse de todos os elementos das equações de campo de

Einstein (4.5), podemos agora calculá-las, obtendo

$$\begin{aligned}
 (tt) \quad 0 = & 4 \left( \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial a}{\partial \rho} \right)^2 \right) f^3 + 4\rho^2 \left( \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right. \\
 & + \left. \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2} \right) f^2 - 4\rho \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} + \rho \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \right) \right) f + 5\rho^2 \left( \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right), \tag{4.87}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\rho\rho)(zz) \quad 0 = & 4 \left( f \left( \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial a}{\partial \rho} \right)^2 \right) + \rho \frac{\partial h}{\partial \rho} \right) f^2 \\
 & + \rho^2 \left( \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right), \tag{4.88}
 \end{aligned}$$

$$(\rho z)(z\rho) \quad 0 = 4 \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial \rho} f^3 - 2\rho \frac{\partial h}{\partial z} f^2 + \rho^2 \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \rho}, \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi\varphi) \quad 0 = & 4f^3 \left( \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial a}{\partial \rho} \right)^2 \right) \\
 & - \rho^2 \left( 4 \left( \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2} \right) \right. \\
 & \left. f^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 \right). \tag{4.90}
 \end{aligned}$$

Essas equações diferenciais, juntamente com as equações de Maxwell que serão calculadas na próxima seção, são usadas para obter a solução que procuramos, ou seja, as funções  $f(\rho, z)$ ,  $h(\rho, z)$  e  $a(\rho, z)$ , que determinam a métrica em questão.

## 4.2 EQUAÇÕES DE MAXWELL

Utilizando o tensor eletromagnético  $F_{\mu\nu}$  determinado anteriormente (4.8), podemos calcular as equações de Maxwell:

$$F_{\mu\nu;\eta} + F_{\nu\eta;\mu} + F_{\eta\mu;\nu} = 0, \quad (4.91)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 4\pi J^\nu, \quad (4.92)$$

onde  $J^\nu$  é a densidade da quadricorrente. No nosso caso

$$J^\nu = (\psi, \vec{j}) = (0, 0, 0, 0) \quad (4.93)$$

pois as fontes de campo eletromagnético não estão presentes, ou seja, a densidade de carga  $\psi$  e a densidade de corrente  $\vec{j}$  são nulas na região do espaço-tempo no qual estamos buscando uma solução.

Calculando as equações (4.91), obtemos a solução trivial para todas as equações.

Para as equações (4.92), obtemos somente

$$\rho \frac{\partial a}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + f \left( \rho \left( \frac{\partial^2 a}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial a}{\partial \rho} \right) + \rho \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (4.94)$$

De posse da solução de Gutsunaev e Manko, podemos agora testá-la e verificar que é válida. Essa solução deve satisfazer as equações de campo de Einstein (4.87), (4.88), (4.89) e (4.90), e a equação de Maxwell (4.94).

## 4.3 FORMA COMPACTA DAS EQUAÇÕES DE CAMPO

As equações de campo de Einstein-Maxwell (4.87), (4.88), (4.89), (4.90) e (4.94), podem também ser escritas em uma forma

compacta (GUTSUNAEV; MANKO, 1988):

$$0 = (\nabla f)^2 + 2\rho^{-2} f^3 (\nabla a)^2 - f \Delta f, \quad (4.95)$$

$$0 = \nabla (\rho^{-2} f \nabla a), \quad (4.96)$$

$$0 = \rho f^{-2} (f_{,\rho}^2 - f_{,z}^2) + 4\rho^{-1} f (a_{,\rho}^2 - a_{,z}^2) - 4h_{,\rho}, \quad (4.97)$$

$$0 = \rho f^{-2} f_{,\rho} f_{,z} + 4\rho^{-1} f a_{,\rho} a_{,z} - 2h_{,z}, \quad (4.98)$$

onde a equação (4.95) é dada pela soma das equações (4.87) e (4.90). As derivadas parciais nessa forma compacta são denotadas por uma vírgula seguida da variável no qual a função é diferenciada. Os operadores diferenciais  $\nabla$  e  $\Delta$  são definidos em coordenadas de Weyl como

$$\Delta = \nabla^2 = \partial_{\rho\rho} + \rho^{-1} \partial_{\rho} + \partial_{zz}, \quad (4.99)$$

$$\nabla = \hat{\rho} \partial_{\rho} + \hat{z} \partial_z. \quad (4.100)$$

#### 4.4 SOLUÇÃO DE GUTSUNAEV E MANKO

A solução de Gutsunaev e Manko, para uma massa de raio infinitesimal na presença de um campo magnético de dipolo, é apresentada em coordenadas prolatas esferoidais  $\sigma$  e  $\xi$  na forma:

$$\begin{aligned} f(\sigma, \xi) &= \frac{(\sigma - 1) \left( 4b^2 (1 - \xi^2) \sigma^2 + (b^2 (\sigma^2 - 1) - \xi^2 + \sigma^2)^2 \right)^2}{(\sigma + 1) \left( (b^2 (\sigma - 1)^2 - \xi^2 + \sigma^2)^2 - 4b^2 \xi^2 (\sigma^2 - 1) \right)^2}, \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned}
a(\sigma, \xi) &= \frac{4b^3k(1-\xi^2)(2(b^2+1)\sigma^3 + (1-3b^2)\sigma^2 + b^2 + \xi^2)}{(b^2+1)\left(4b^2(1-\xi^2)\sigma^2 + (b^2(\sigma^2-1) - \xi^2 + \sigma^2)^2\right)}, \\
\end{aligned} \tag{4.102}$$

$$\begin{aligned}
e^{2h(\sigma, \xi)} &= \frac{(\sigma^2-1)\left(4b^2(1-\xi^2)\sigma^2 + (b^2(\sigma^2-1) - \xi^2 + \sigma^2)^2\right)^4}{(b^2+1)^8(\sigma^2-\xi^2)^9}, \\
\end{aligned} \tag{4.103}$$

onde  $b$  é o parâmetro magnético e  $k$  um número real.

As relações entre as coordenadas de Weyl, as quais estamos trabalhando, e as coordenadas prolatas esferoidais são dadas por

$$\rho = k\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{\sigma^2-1}, \tag{4.104}$$

$$z = k\xi\sigma, \tag{4.105}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{(z-k)^2 + \rho^2} + \sqrt{(k+z)^2 + \rho^2}}{2k}, \tag{4.106}$$

$$\xi = \frac{\sqrt{(k+z)^2 + \rho^2} - \sqrt{(z-k)^2 + \rho^2}}{2k}. \tag{4.107}$$

O teste das soluções (4.101), (4.102) e (4.103) se resume em convertê-las para as coordenadas de Weyl utilizando as relações (4.106) e (4.107), e posteriormente aplicá-las nas equações de campo de Einstein (4.87), (4.88), (4.89) e (4.90), e na equação de Maxwell (4.94).

As soluções convertidas e as suas substituições nas equações diferenciais, a fim de demonstrar que são soluções, serão omitidas do texto, pois são extensas. O teste das soluções foi preparado e confirmado utilizando o software Mathematica (2014). Todas as cinco equações foram satisfeitas nos testes que, quando computáveis, foram realizados analiticamente, ou numericamente quando os cálculos analíticos se mostravam excessivamente demorados, devido às limitações do computador utilizado. Todos os cálculos aqui realizados estão disponíveis na Internet (FORMIGHIERI, 2015).

#### 4.5 SOLUÇÃO DE GUTSUNAEV E MANKO NAS COORDENADAS DE SCHWARZSCHILD

Faremos no nosso problema uma mudança de coordenadas. Com essa mudança de coordenadas, a solução Gutsunaev e Manko se torna a solução Schwarzschild no limite do campo magnético tendendo a zero, como veremos mais à frente (e também nossas comparações com a métrica de Schwarzschild ficam diretas, já que estamos utilizando o mesmo sistema de coordenadas). Considere:

$$\sigma = \frac{r - m}{k}, \quad (4.108)$$

$$\xi = \cos(\theta), \quad (4.109)$$

$$k = \frac{(b^2 + 1)m}{1 - 3b^2}, \quad (4.110)$$

$$b = \frac{\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}m}{\sqrt{8m^2 + 3\sqrt{3}q}}}}{\sqrt{3}}, \quad (4.111)$$



onde  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas de Schwarzschild,  $m$  é a massa e  $q$  é o momento de dipolo magnético.

Nessas novas coordenadas, as soluções (4.101), (4.102) e (4.103) tomam então a forma (por ora não faremos a substituição da relação (4.111))

$$f(r, \theta) = \left( 1 - \frac{2(b^2 + 1)m}{4b^2m + (1 - 3b^2)r} \right) \left( \frac{M}{N} \right)^2, \quad (4.112)$$

$$a(r, \theta) = \frac{4b^3m^2 \sin^2(\theta) P}{(1 - 3b^2) M}, \quad (4.113)$$

$$e^{2h(r, \theta)} = \frac{\left( (1 - 3b^2)^2 (r - m)^2 - (b^2 + 1)^2 m^2 \right)}{\left( (1 - 3b^2)^2 (r - m)^2 - (b^2 + 1)^2 m^2 \cos^2(\theta) \right)^9} M^4, \quad (4.114)$$

onde as equações auxiliares são definidas por

$$\begin{aligned} M &= 4b^2 (1 - 3b^2)^2 m^2 \sin^2(\theta) (r - m)^2 \\ &\quad + \left( (1 - 3b^2)^2 (r - m)^2 - (b^2 + 1) m^2 (b^2 + \cos^2(\theta)) \right)^2, \end{aligned} \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} N &= \left( m^2 (b^2 - (b^2 + 1) \cos^2(\theta)) \right. \\ &\quad \left. + ((1 - 3b^2) (r - m) - b^2 m)^2 \right)^2 \\ &\quad - 4b^2 m^2 \cos^2(\theta) \left( (1 - 3b^2)^2 (r - m)^2 \right. \\ &\quad \left. - (b^2 + 1)^2 m^2 \right), \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$P = (b^2 + 1)^2 m^3 (b^2 + \cos^2(\theta)) + (1 - 3b^2)^3 (r - m)^2 (2r - m). \quad (4.117)$$

Vamos converter o tensor métrico inicial (4.4) para as novas coordenadas estabelecidas em (4.108), (4.109) e (4.110). Faremos uma transformação de coordenadas tensorial utilizando

$$g_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(t, \rho, z, \varphi). \quad (4.118)$$

Para calcular as derivadas na equação (4.118), precisamos das relações entre as coordenadas de Weyl iniciais e as novas coordenadas, facilmente calculáveis através das relações já estabelecidas em (4.104), (4.105), (4.108), (4.109) e (4.110). Obtemos

$$\rho = - \frac{(b^2 + 1) m \sin(\theta) \sqrt{\frac{(1-3b^2)^2 (m-r)^2}{(b^2+1)^2 m^2} - 1}}{3b^2 - 1}, \quad (4.119)$$

$$z = \cos(\theta)(r - m). \quad (4.120)$$

Podemos enfim calcular o tensor métrico nas novas coordenadas. Suas componentes ficam:

$$g_{tt} = -f, \quad (4.121)$$

$$g_{rr} = \frac{e^{2h} \left( (r - m)^2 - \frac{(b^2+1)^2 m^2 \cos^2(\theta)}{(1-3b^2)^2} \right)}{f \left( (r - m)^2 - \frac{(b^2+1)^2 m^2}{(1-3b^2)^2} \right)}, \quad (4.122)$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{e^{2h} \left( (r-m)^2 - \frac{(b^2+1)^2 m^2 \cos^2(\theta)}{(1-3b^2)^2} \right)}{f}, \quad (4.123)$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{\left( (r-m)^2 - \frac{(b^2+1)^2 m^2}{(1-3b^2)^2} \right) \sin^2(\theta)}{f}. \quad (4.124)$$

O comportamento assintótico das soluções é dado pela expansão em série das mesmas para  $r \rightarrow \infty$ :

$$f = 1 - \frac{2m}{r} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right), \quad (4.125)$$

$$a = \frac{8b^3 m^2 \sin^2(\theta)}{(1-3b^2)^2 r} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right), \quad (4.126)$$

$$e^{2h} = 1 - \frac{m^2 \sin^2(\theta)}{r^2} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{1}{r} \right)^3 \right). \quad (4.127)$$

Podemos perceber na expansão que, até primeira ordem em  $r$ , a solução (4.125) se comporta como a solução de Schwarzschild, mas a solução (4.127) é uma constante. Somente em ordens mais altas notamos a contribuição do campo magnético no comportamento assintótico.

A seguir estudaremos dois casos do nosso problema nesse novo sistemas de coordenadas, com o intuito de verificar o comportamento das soluções: o caso sem o campo magnético e o caso com massa nula.

### 4.5.1 Solução de Gutsunaev e Manko nas coordenadas de Schwarzschild, sem campo magnético

Queremos agora estudar as soluções quando não existe um campo magnético, somente a massa. Para isso, devemos tomar o limite do parâmetro magnético  $b$  tendendo a zero, ou mais especificamente, o limite do dipolo magnético  $q$  tendendo a zero (4.111):

$$\lim_{q \rightarrow 0} b = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}m}{\sqrt{8m^2 + 3\sqrt{3}q}}}}{\sqrt{3}} = 0. \quad (4.128)$$

Nesse limite, obtemos para as soluções (4.112), (4.113), (4.114) (já com suas equações auxiliares substituídas):

$$f = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (4.129)$$

$$a = 0, \quad (4.130)$$

$$e^{2h} = \frac{2r(2m - r)}{m^2 \cos(2\theta) - m^2 + 4mr - 2r^2}. \quad (4.131)$$

A componente azimutal do potencial vetor magnético  $A_\mu$  é zero (4.130), como é esperado para um campo magnético nulo.

Da mesma forma, para o tensor métrico ((4.121), (4.122), (4.123) e (4.124)), no limite do parâmetro magnético  $b$  tendendo a zero, temos

$$g_{tt} = -f, \quad (4.132)$$

$$g_{rr} = \frac{e^{2h} (\cos(2\theta)m^2 - m^2 + 4rm - 2r^2)}{2f(2m - r)r}, \quad (4.133)$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{e^{2h} (-\cos(2\theta)m^2 + m^2 - 4rm + 2r^2)}{2f}, \quad (4.134)$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{r(r - 2m) \sin^2(\theta)}{f}. \quad (4.135)$$

Vamos por fim substituir nesse tensor métrico as soluções obtidas sem campo magnético (4.129) e (4.131). O tensor métrico resultante é

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2m}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.136)$$

Quando não temos campo magnético, obtemos portanto, a métrica de Schwarzschild, como deveria se esperar.

#### 4.5.2 Solução de Gutsunaev e Manko nas coordenadas de Schwarzschild, sem massa

Obteremos agora a solução de Gutsunaev e Manko (1987) sem massa, contendo somente o campo magnético.

Primeiramente faremos a substituição da relação (4.111) nas soluções (4.112), (4.113), (4.114) e também nas suas equações auxiliares (4.115), (4.116) e (4.117). Essa substituição é necessária pois o parâmetro magnético  $b$  contém em sua definição a massa  $m$ , variável que desejamos tomar o limite tendendo a zero. No limite  $m \rightarrow 0$

obtemos então as soluções

$$\begin{aligned}
 f = & \left( \left( 3\sqrt{2}r - 2 \times 3^{3/4}\sqrt{q} \right) \right. \\
 & \left. \left( 2q^2(3\cos(2\theta) + 5)^2 - 8\sqrt{3}qr^2(9\cos(2\theta) + 7) + 96r^4 \right)^2 \right) / \\
 & \left( \left( 2 \times 3^{3/4}\sqrt{q} + 3\sqrt{2}r \right) \right. \\
 & \left. \left( 8\sqrt{2}\sqrt[4]{3}q^{3/2}r(3\cos(2\theta) + 1) + 2q^2(3\cos(2\theta) + 5)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - 32\sqrt{2}3^{3/4}\sqrt{q}r^3 - 24\sqrt{3}qr^2(3\cos(2\theta) + 1) + 96r^4 \right)^2 \right), \tag{4.137}
 \end{aligned}$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}q\sin^2(\theta) \left( \sqrt{2}\sqrt[4]{3}q^{3/2}(3\cos(2\theta) + 5) + 24r^3 \right)}{\sqrt{3}q^2(3\cos(2\theta) + 5)^2 - 12qr^2(9\cos(2\theta) + 7) + 48\sqrt{3}r^4}, \tag{4.138}$$

$$\begin{aligned}
 e^{2h} = & \left( \left( \sqrt{3}r^2 - 2q \right) \left( q^2(3\cos(2\theta) + 5)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - 4\sqrt{3}qr^2(9\cos(2\theta) + 7) + 48r^4 \right)^4 \right) / \\
 & \left( 65536 \left( \sqrt{3}r^2 - 2q\cos^2(\theta) \right)^9 \right). \tag{4.139}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, para o tensor métrico ((4.121), (4.122), (4.123) e (4.124)), após substituírmos a relação (4.111) e tomarmos

o limite da massa  $m$  tendendo a zero, temos

$$g_{tt} = -f, \quad (4.140)$$

$$g_{rr} = \frac{e^{2h} \left( 2\sqrt{3} q \cos^2(\theta) - 3r^2 \right)}{f \left( 2\sqrt{3} q - 3r^2 \right)}, \quad (4.141)$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{e^{2h} \left( 3r^2 - 2\sqrt{3} q \cos^2(\theta) \right)}{3f}, \quad (4.142)$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{\left( 3r^2 - 2\sqrt{3} q \right) \sin^2(\theta)}{3f}. \quad (4.143)$$

Novamente, quando possível, os testes das soluções foram feitos de forma analítica. Testes numéricos foram realizados quando os testes analíticos se mostravam demasiadamente demorados. As soluções satisfizeram as equações de campo de Einstein e as equações de Maxwell, que nesse caso também foram omitidas devido à sua extensão. Todos os cálculos aqui realizados estão disponíveis na Internet (FORMIGHIERI, 2015).

O comportamento assintótico das soluções é dado pela expansão em série das mesmas para  $r \rightarrow \infty$ :

$$f = 1 + \frac{\sqrt{2} q^{3/2} (3 \cos(2\theta) + 1)}{3^{3/4} r^3} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{1}{r} \right)^4 \right), \quad (4.144)$$

$$a = \frac{q \sin^2(\theta)}{r} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right), \quad (4.145)$$

$$e^{2h} = 1 + \frac{q^2(9 \cos(2\theta) + 7) \sin^2(\theta)}{4r^4} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{r}\right)^5\right). \quad (4.146)$$

As soluções (4.144) e (4.146) se comportam assintoticamente como soluções do espaço-tempo plano nas primeiras ordens em  $r$ . As diferenças só começam a aparecer na terceira e quarta ordens, respectivamente.

Quando o momento de dipolo magnético  $q$  tende a zero, as soluções (4.137), (4.138) e (4.139) ficam:

$$f = 1, \quad (4.147)$$

$$a = 0, \quad (4.148)$$

$$e^{2h} = 1. \quad (4.149)$$

Já o tensor métrico ((4.140), (4.141), (4.142) e (4.143)), quando  $q$  tende a zero, se apresenta como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{2h}}{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{2h}r^2}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{f} \end{pmatrix}. \quad (4.150)$$

Substituindo as soluções (4.147) e (4.149) em (4.150), obtemos que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.151)$$



Percebe-se que obtemos a métrica de um espaço-tempo plano (espaço-tempo de Minkowski (EINSTEIN et al., 1920) nas coordenadas de Schwarzschild), como era de se esperar quando não há massa e nem campo magnético.

## 4.6 A FORMA DO CAMPO MAGNÉTICO

Vamos agora estudar a forma do campo magnético de dipolo da solução de Gutsunaev e Manko (1987) nas coordenadas de Weyl. As componentes do campo magnético nesse sistema de coordenadas podem ser obtidas diretamente da definição do tensor eletromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (4.152)$$

onde utilizando o quadripotencial eletromagnético do nosso problema através da relação

$$A_\mu = (0, 0, 0, a), \quad (4.153)$$

obtivemos o tensor eletromagnético da forma

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial a}{\partial \rho} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial a}{\partial z} \\ 0 & -\frac{\partial a}{\partial \rho} & -\frac{\partial a}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.154)$$

Comparando com a forma geral do tensor eletromagnético em termos das componentes do campo eletromagnético, dada por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_\rho & -E_z & -E_\varphi \\ E_\rho & 0 & B_\varphi & -B_z \\ E_z & -B_\varphi & 0 & B_\rho \\ E_\varphi & B_z & -B_\rho & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.155)$$

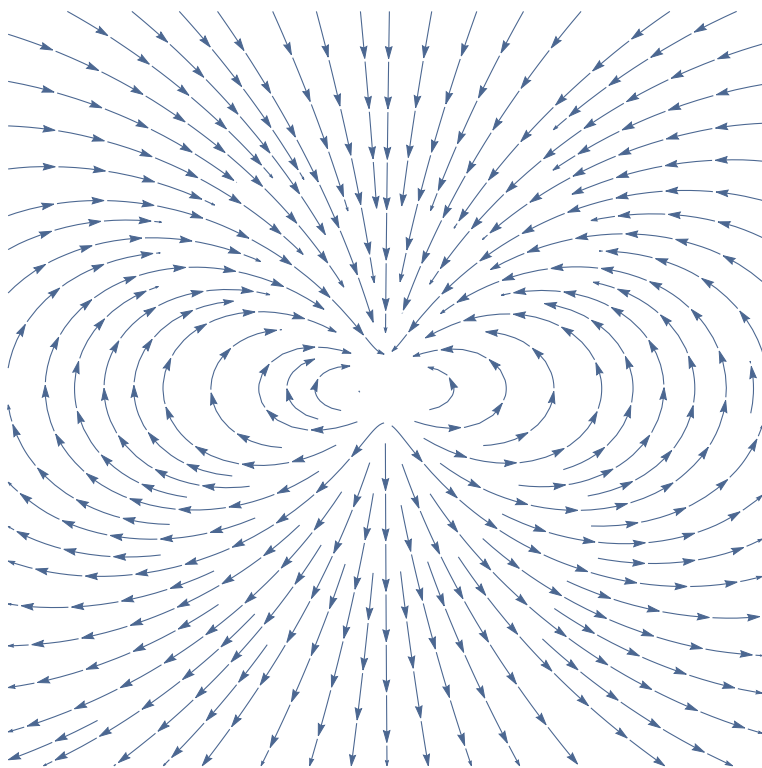
temos que as componentes do campo magnético são identificadas como sendo

$$B_\rho = \frac{\partial a}{\partial z}, \quad (4.156)$$

$$B_z = -\frac{\partial a}{\partial \rho}. \quad (4.157)$$

Agora o procedimento é converter a solução inicial do potencial vetor magnético (4.102), de coordenadas prolatas esferoidais para coordenadas de Weyl, utilizando as transformações (4.106) e (4.107). Obtemos o campo magnético representado na figura 2.

Figura 2 – Campo magnético nas coordenadas de Weyl



Campo magnético da solução de Gutsunaev e Manko (1987) nas coordenadas de Weyl. O campo magnético é um campo de dipolo.

Podemos ver, qualitativamente, que o campo magnético tem a forma de um campo magnético de dipolo.

#### 4.7 A FORMA DA MÉTRICA DAS SOLUÇÕES

Estamos aptos a visualizar o comportamento das componentes  $g_{tt}$ ,  $g_{rr}$ ,  $g_{\theta\theta}$  e  $g_{\varphi\varphi}$  para as métricas dos três casos calculados nas

coordenadas de Schwarzschild: o caso com massa e campo magnético, o caso com somente massa (métrica de Schwarzschild) e o caso com somente campo magnético.

Para os gráficos, utilizaremos os seguintes valores de massa e momento de dipolo magnético que podem ocorrer para uma estrela de nêutrons do tipo magnetar, onde temos um campo magnético de  $10^{15}$  G (o cálculo do momento de dipolo magnético da magnetar pode ser visto no apêndice B):

$$m^* = 1,4 \times \text{massa solar} \approx 2,8 \times 10^{33} \text{ g}, \quad (4.158)$$

$$q^* = 5 \times 10^{32} \frac{\text{erg}}{\text{G}}, \quad (4.159)$$

onde o asterisco significa que os valores estão no sistema de unidades cgs-Gaussiano.

Como estamos utilizando o sistema de unidades cgs-Gaussiano geometrizado, devemos converter esses valores (ver apêndice C):

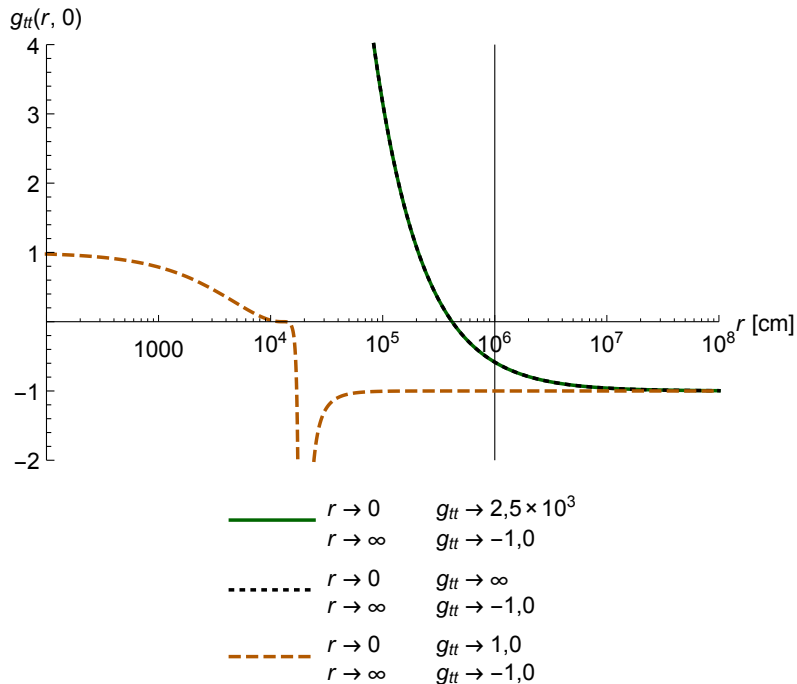
$$m = \frac{G}{c^2} m^* \approx 2,1 \times 10^5 \text{ cm}, \quad (4.160)$$

$$q = \frac{\sqrt{G}}{c^2} q^* \approx 1,4 \times 10^8 \text{ cm}^2. \quad (4.161)$$

Devemos ser cuidadosos e notar que estas soluções representam uma massa central de tamanho infinitesimal, sem raio. O raio de nossa estrela de nêutrons é de  $R = 10^6$  cm (utilizamos esse raio no cálculo do momento de dipolo magnético) e portanto em regiões com valores inferiores a esse já não estamos mais sendo realistas em nossas considerações.

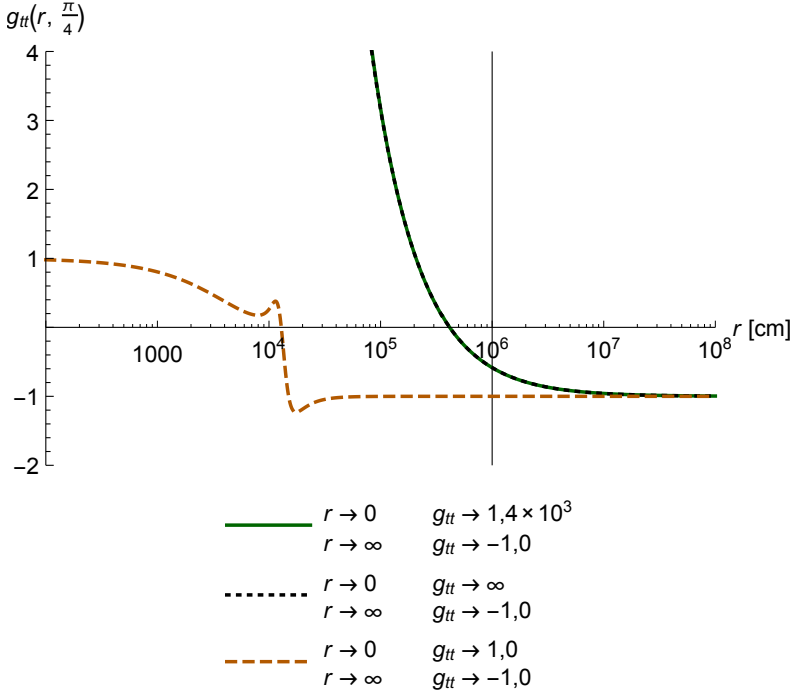
Cada gráfico a seguir contempla a métrica dos três casos simultaneamente. Entre os gráficos variamos qual componente da métrica e qual dos três ângulos polares ( $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  ou  $\theta = 90^\circ$ ) estamos investigando. A partir destes gráficos, podemos avaliar o efeito do campo magnético e da massa, nas métricas.

Figura 3 – Componente  $g_{tt}$  para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



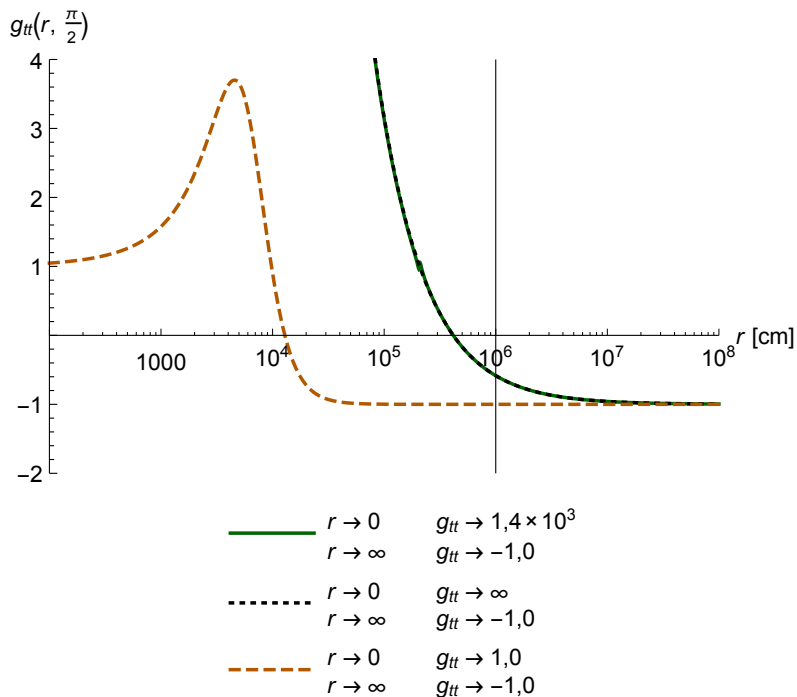
Variação da componente  $g_{tt}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

Figura 4 – Componente  $g_{tt}$  para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



Variação da componente  $g_{tt}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

Figura 5 – Componente  $g_{tt}$  para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



Variação da componente  $g_{tt}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

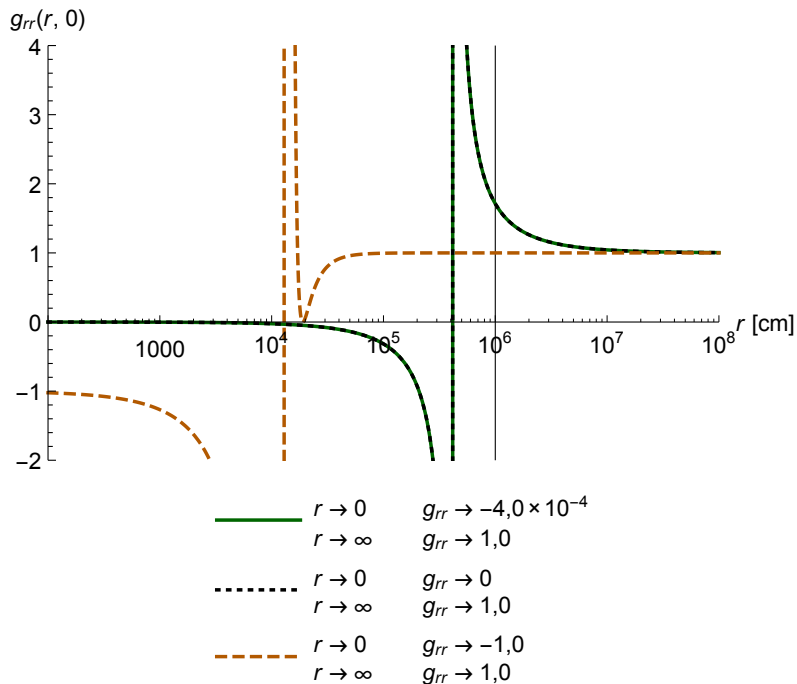
Podemos notar nas figuras 3, 4 e 5 que ao contrário da métrica de Schwarzschild (linha pontilhada), não temos uma singularidade em  $r = 0$  para o caso com massa e campo magnético (linha sólida). Supõe-se que essa singularidade central é removida devido ao papel



antagônico do campo magnético em relação à massa no centro do sistema, efetivamente impedindo uma curvatura infinita. A princípio é possível encontrar uma relação entre massa e campo magnético que seja limitante para o surgimento da singularidade central, mas devemos lembrar que essa situação é uma situação não física.

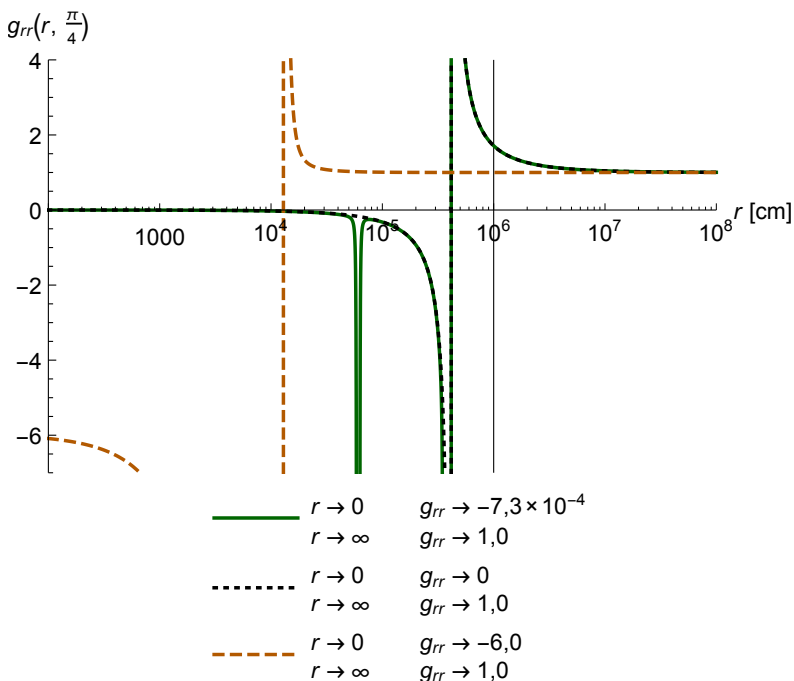
Existe singularidade no caso onde temos somente campo magnético na figura 3, quando  $r \approx 2 \times 10^4$  cm. Nesta região, nos aproximamos de um dos polos do dipolo magnético. Por simetria, temos uma outra singularidade quando  $\theta = \pi$ .

Figura 6 – Componente  $g_{rr}$  para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



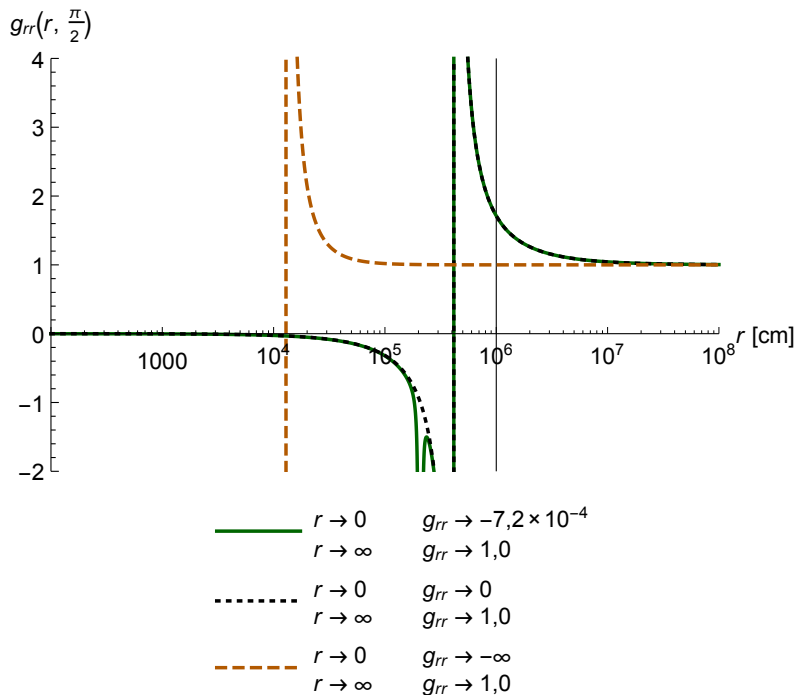
Variação da componente  $g_{rr}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

Figura 7 – Componente  $g_{rr}$  para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



Variação da componente  $g_{rr}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

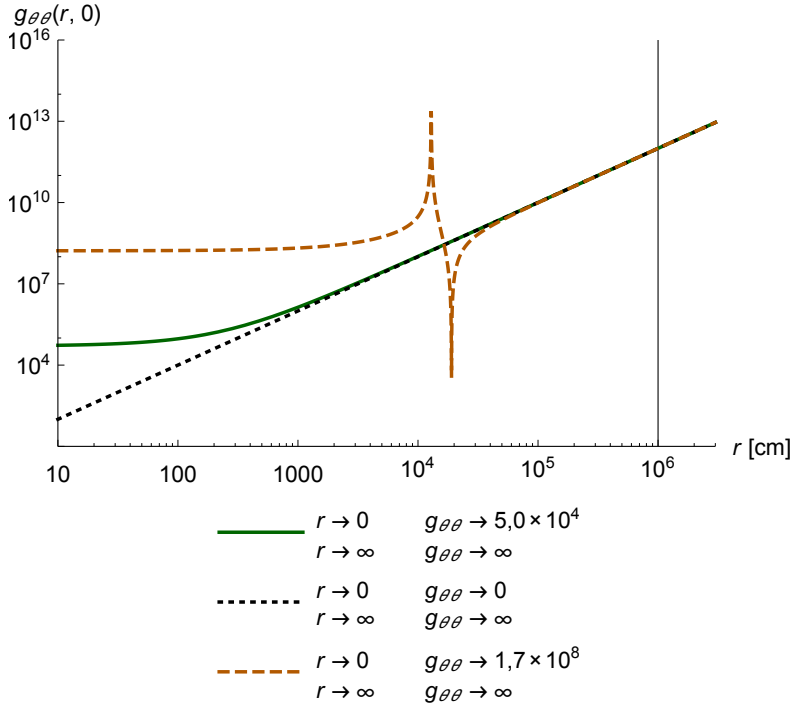
Figura 8 – Componente  $g_{rr}$  para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



Variação da componente  $g_{rr}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

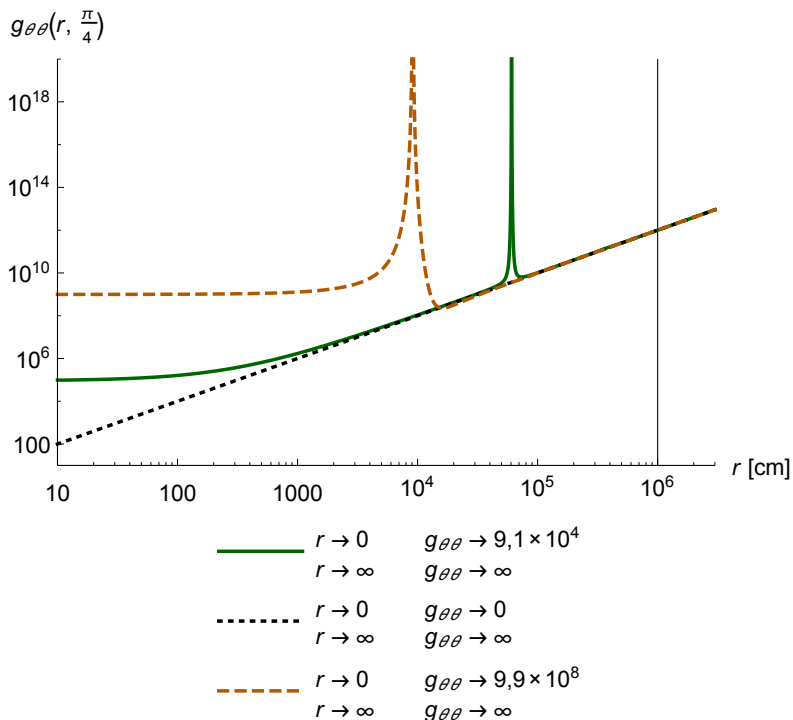
Na figura 8, temos uma singularidade na métrica para o caso onde temos somente campo magnético (linha tracejada), quando  $r = 0$ . Já nas figuras 6 e 7 essa singularidade em  $r = 0$  não existe.

Figura 9 – Componente  $g_{\theta\theta}$  para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



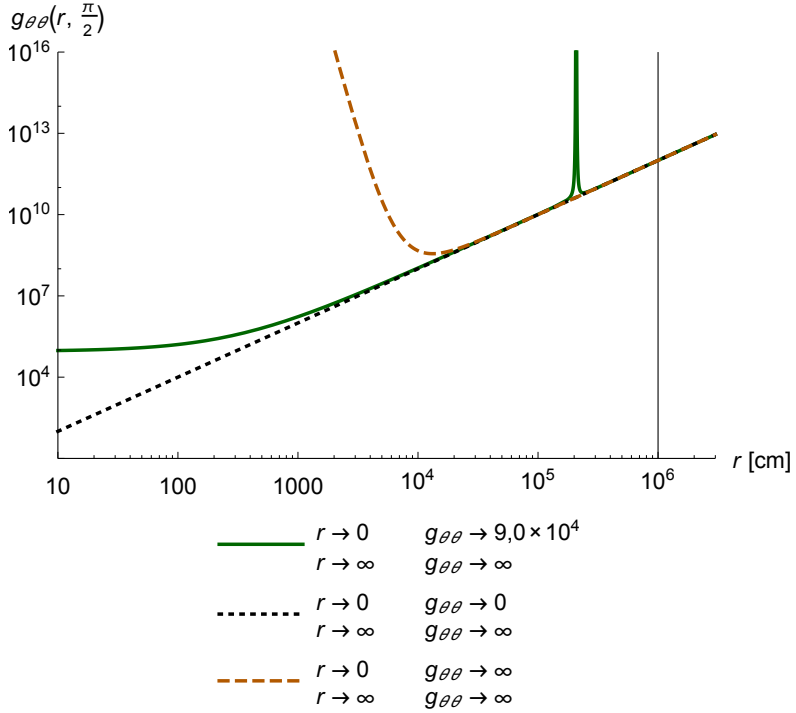
Variação da componente  $g_{\theta\theta}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

Figura 10 – Componente  $g_{\theta\theta}$  para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



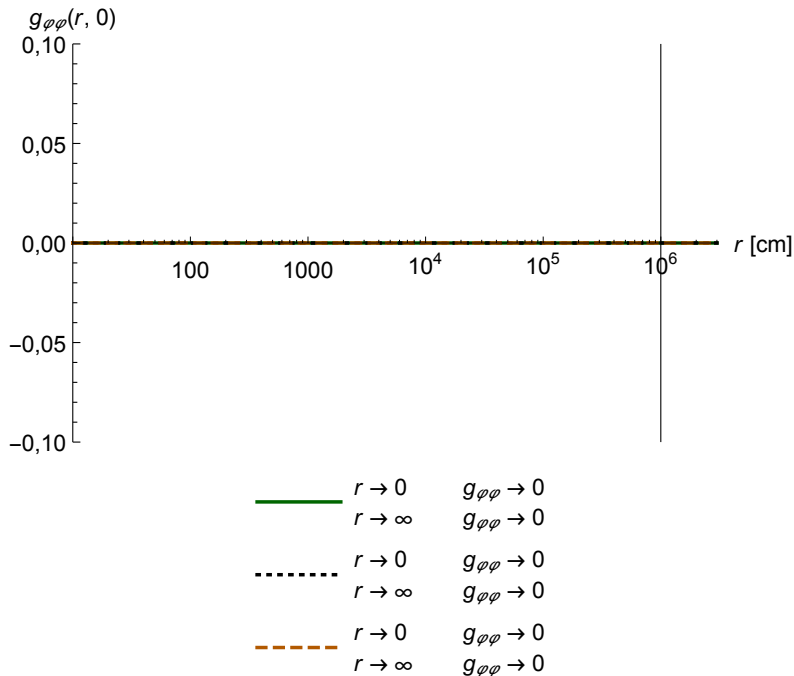
Variação da componente  $g_{\theta\theta}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

Figura 11 – Componente  $g_{\theta\theta}$  para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



Variação da componente  $g_{\theta\theta}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

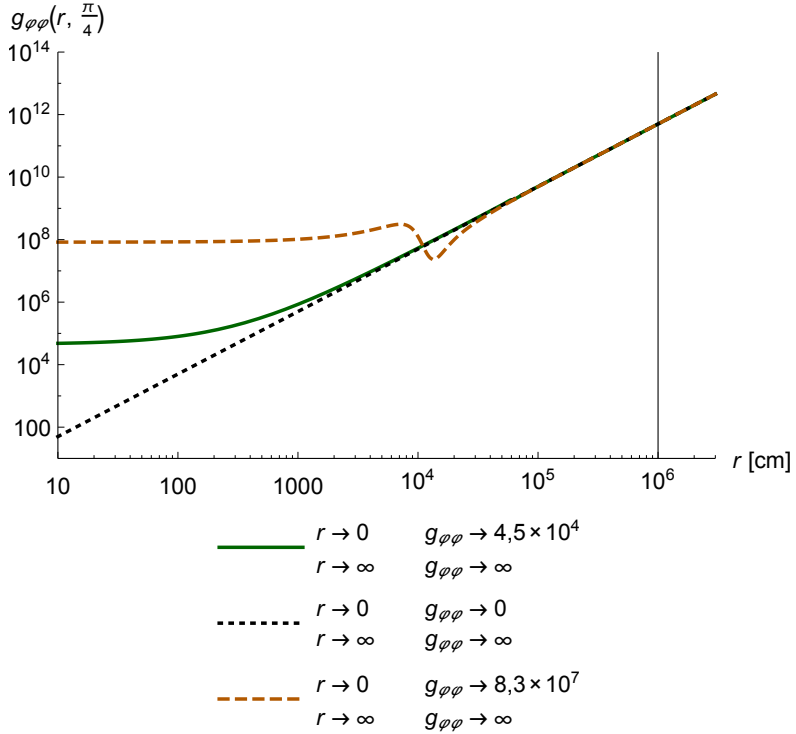
Figura 12 – Componente  $g_{\varphi\varphi}$  para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



Variação da componente  $g_{\varphi\varphi}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

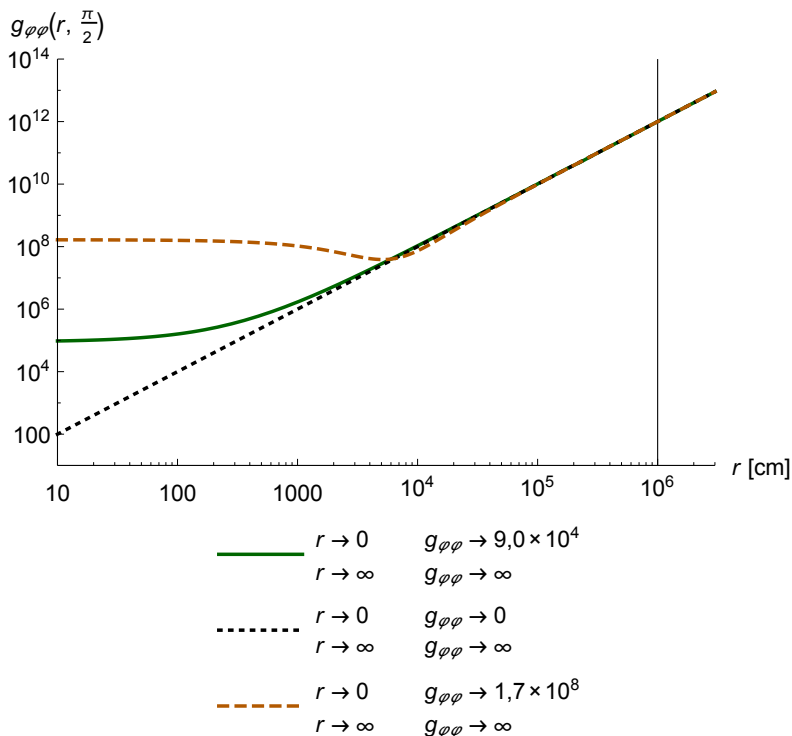


Figura 13 – Componente  $g_{\varphi\varphi}$  para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



Variação da componente  $g_{\varphi\varphi}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

Figura 14 – Componente  $g_{\varphi\varphi}$  para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{15}$  G



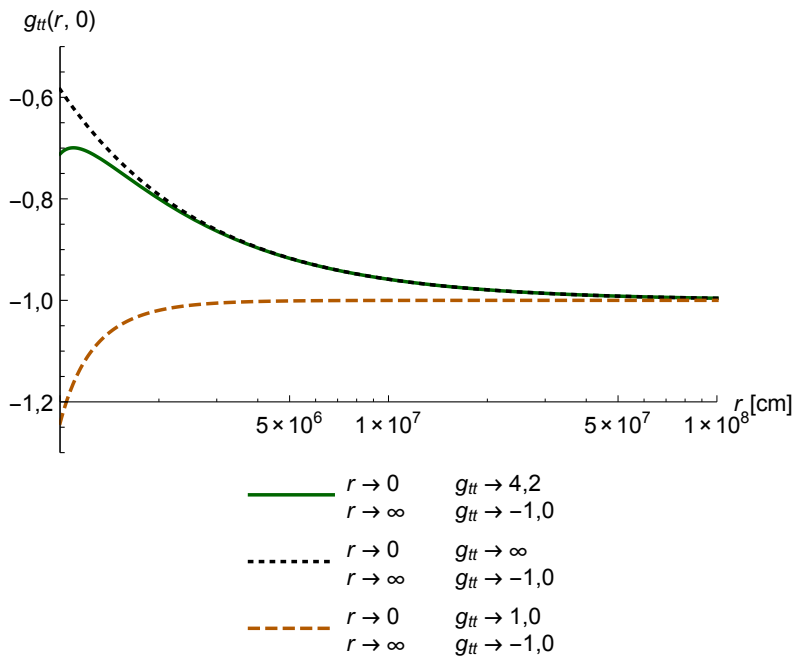
Variação da componente  $g_{\varphi\varphi}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético. A linha sólida vertical indica o limite inferior de interpretação física da componente.

Em todos os gráficos percebemos que o caso com massa e campo magnético segue quase que fielmente o caso onde temos somente a massa, salvo quando estamos próximos da origem do sis-

tema. Este fato denota o quão tênue é a contribuição do campo magnético na curvatura do espaço-tempo, mesmo para os casos em que temos campos magnéticos extremos.

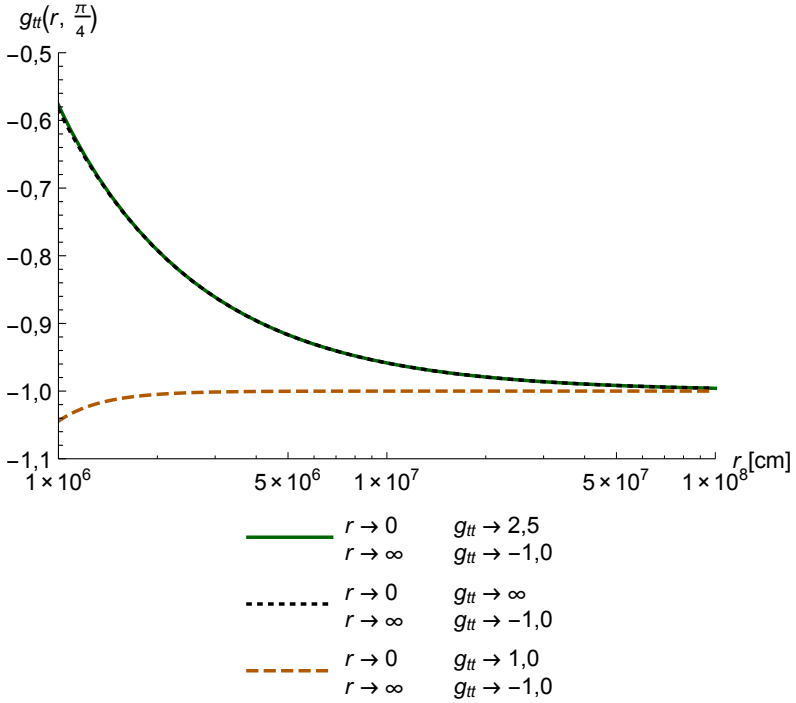
Para notarmos uma variação mais expressiva da métrica, vamos refazer os gráficos anteriores das componentes, mas agora com foco na região de interpretação física ( $r \geq 10^6$  cm) e com um campo magnético  $10^3$  vezes mais intenso, ou seja, de  $10^{18}$  G (encontrado em colisões de íons pesados nos aceleradores de partículas).

Figura 15 – Componente  $g_{tt}$  para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



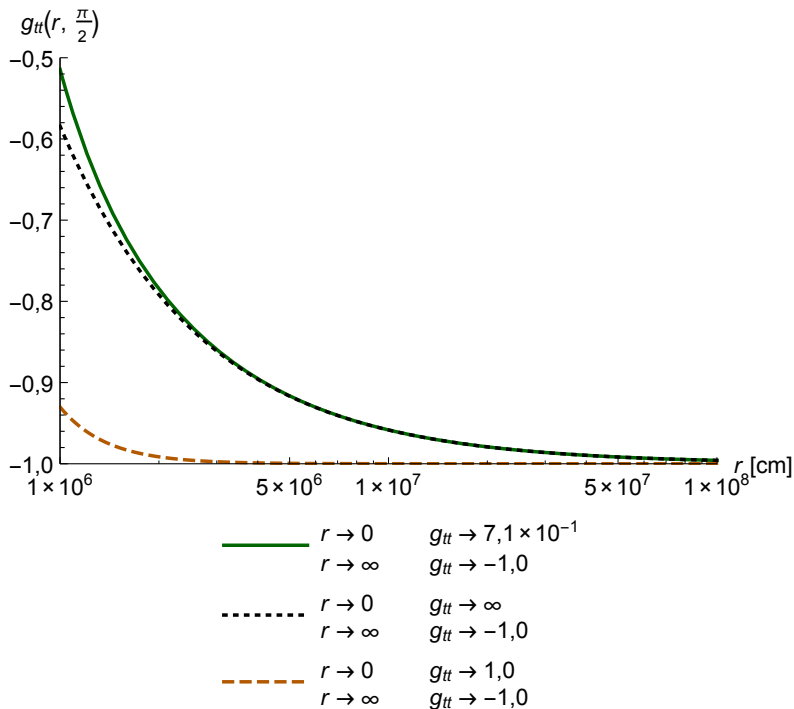
Variação da componente  $g_{tt}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

Figura 16 – Componente  $g_{tt}$  para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



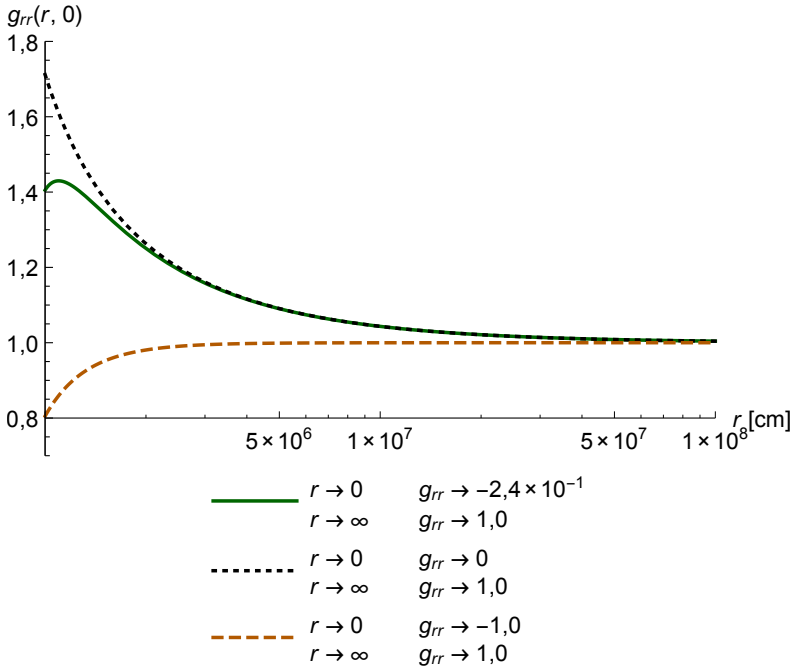
Variação da componente  $g_{tt}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

Figura 17 – Componente  $g_{tt}$  para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



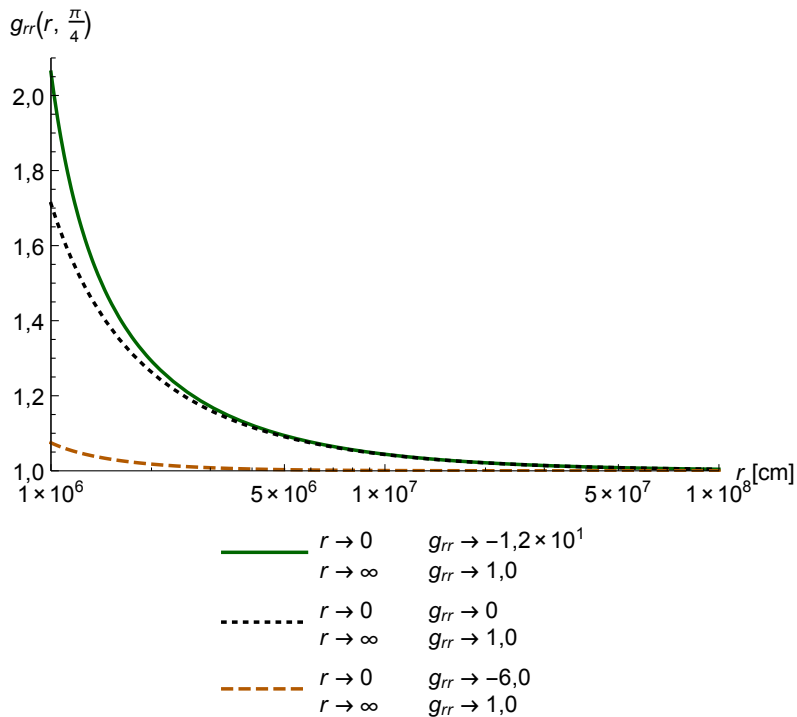
Variação da componente  $g_{tt}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

Figura 18 – Componente  $g_{rr}$  para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



Variação da componente  $g_{rr}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

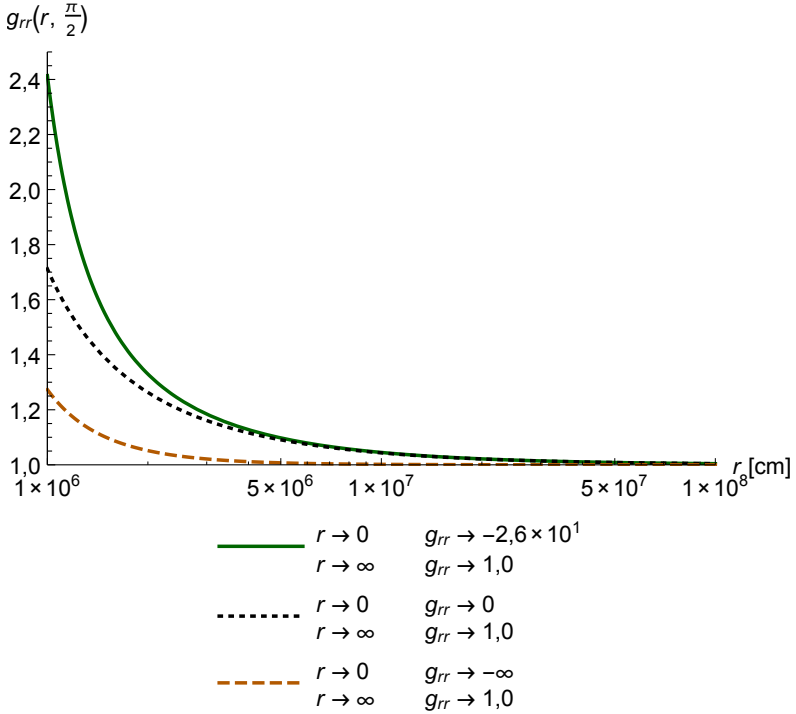
Figura 19 – Componente  $g_{rr}$  para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



Variação da componente  $g_{rr}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

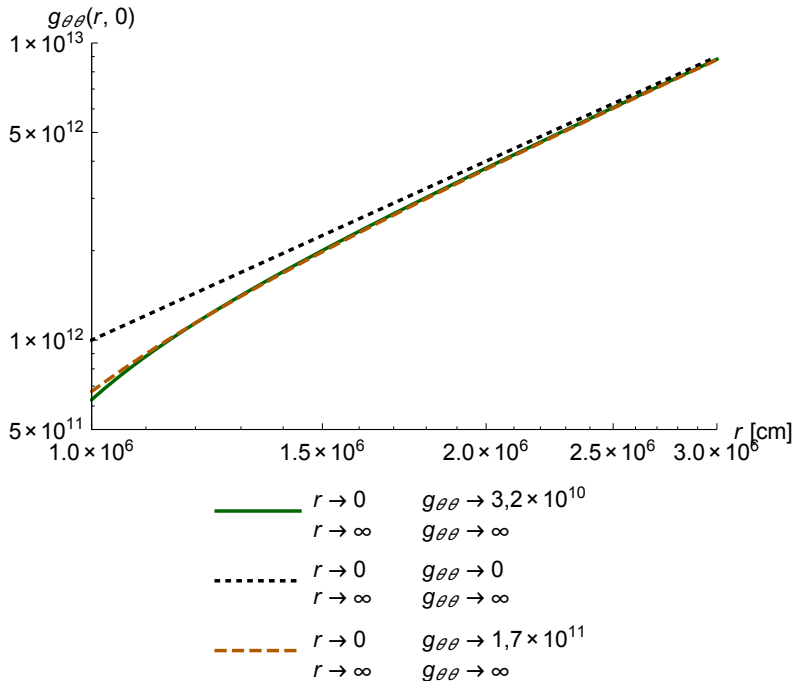


Figura 20 – Componente  $g_{rr}$  para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



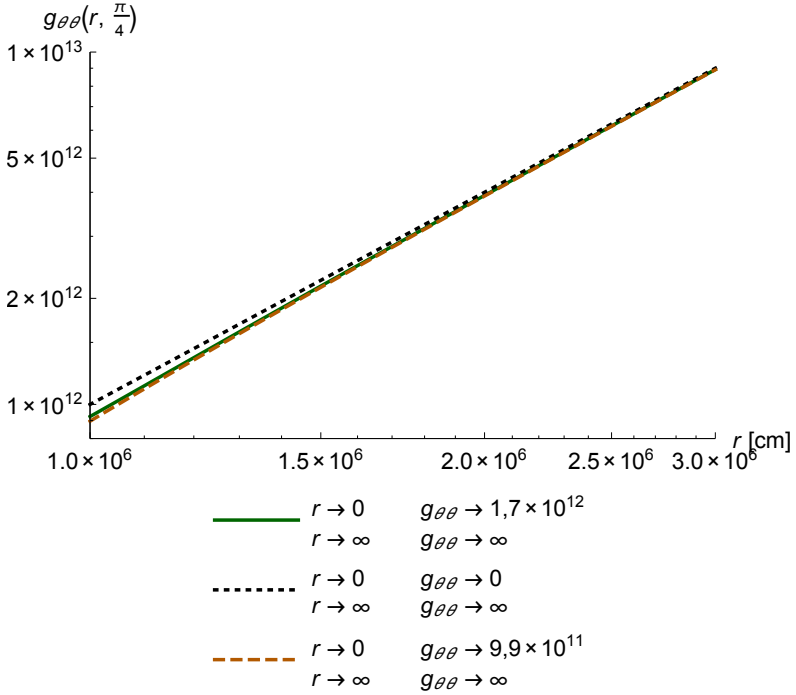
Variação da componente  $g_{rr}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

Figura 21 – Componente  $g_{\theta\theta}$  para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



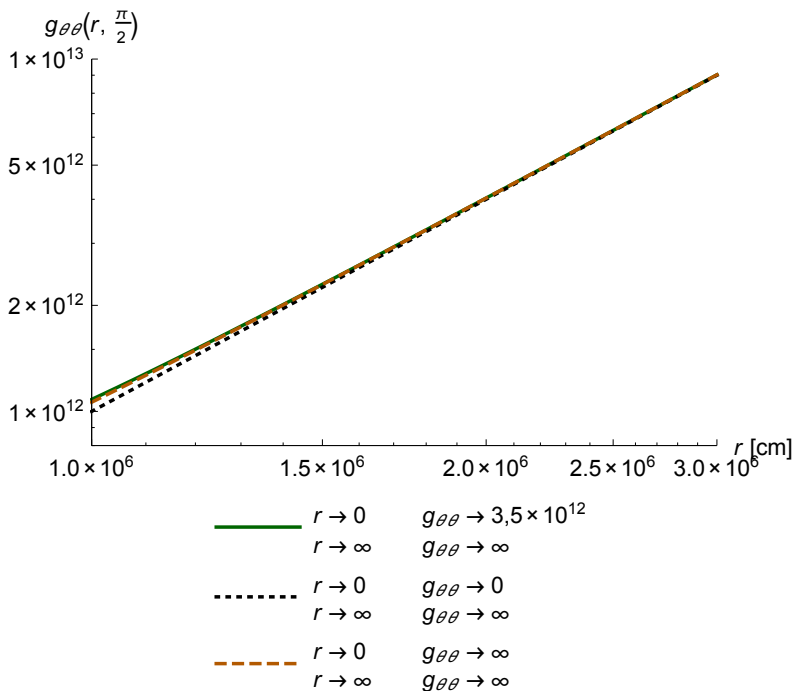
Variação da componente  $g_{\theta\theta}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

Figura 22 – Componente  $g_{\theta\theta}$  para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



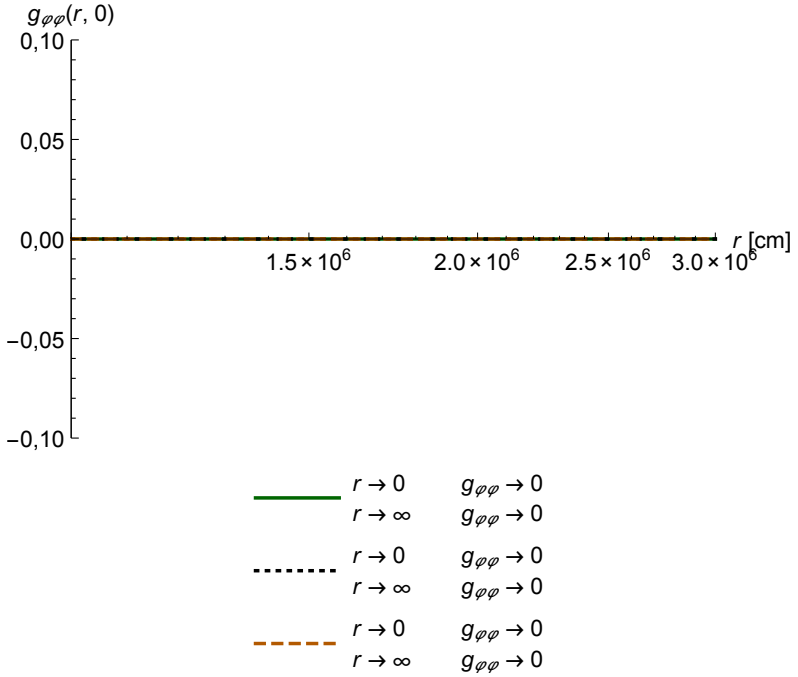
Variação da componente  $g_{\theta\theta}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

Figura 23 – Componente  $g_{\theta\theta}$  para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



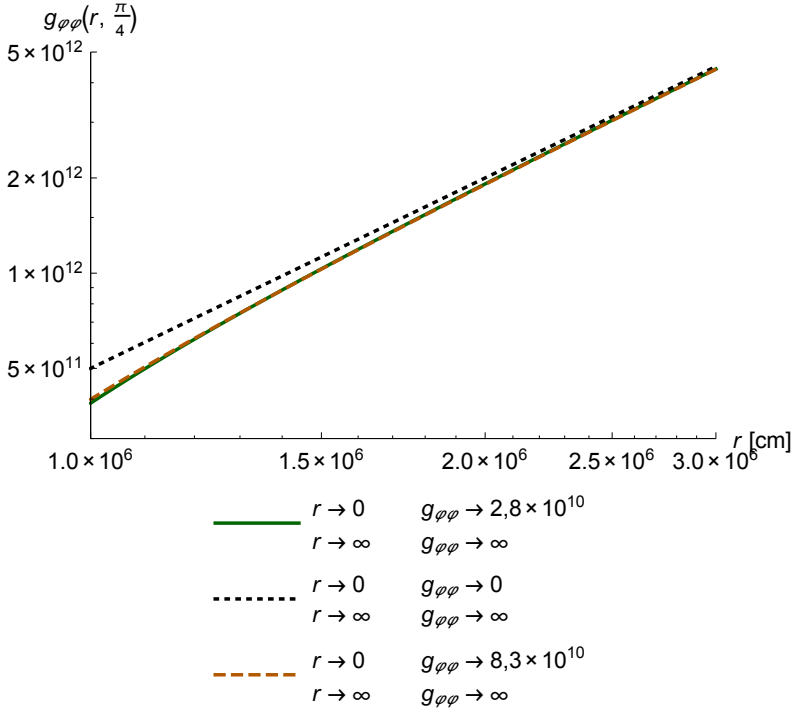
Variação da componente  $g_{\theta\theta}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

Figura 24 – Componente  $g_{\varphi\varphi}$  para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



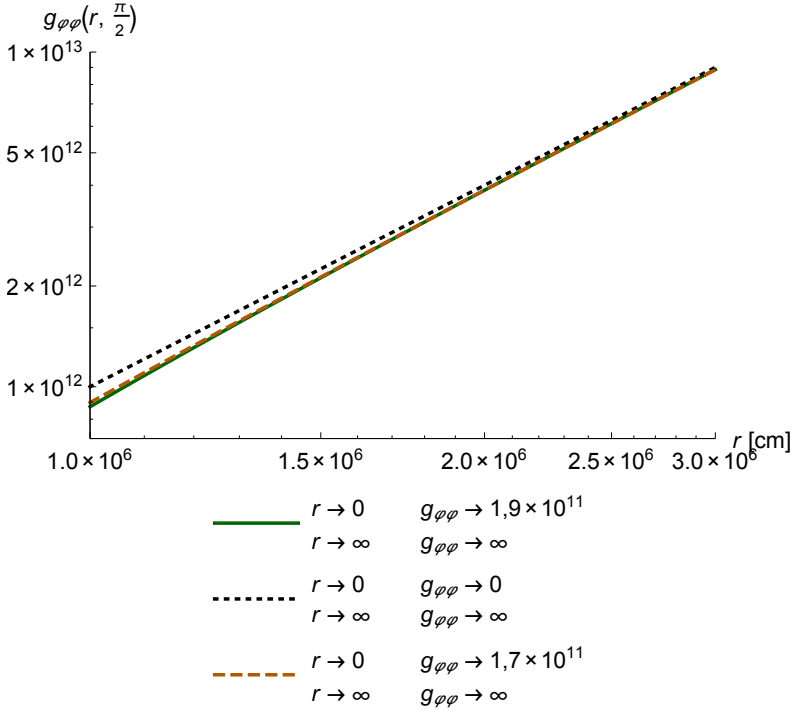
Variação da componente  $g_{\varphi\varphi}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 0^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

Figura 25 – Componente  $g_{\varphi\varphi}$  para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



Variação da componente  $g_{\varphi\varphi}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 45^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

Figura 26 – Componente  $g_{\varphi\varphi}$  para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$  e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



Variação da componente  $g_{\varphi\varphi}$  com a coordenada  $r$ , para o ângulo polar  $\theta = 90^\circ$ . A linha sólida indica a métrica com massa e campo magnético, a linha pontilhada a métrica com somente massa e a linha tracejada a métrica com somente campo magnético.

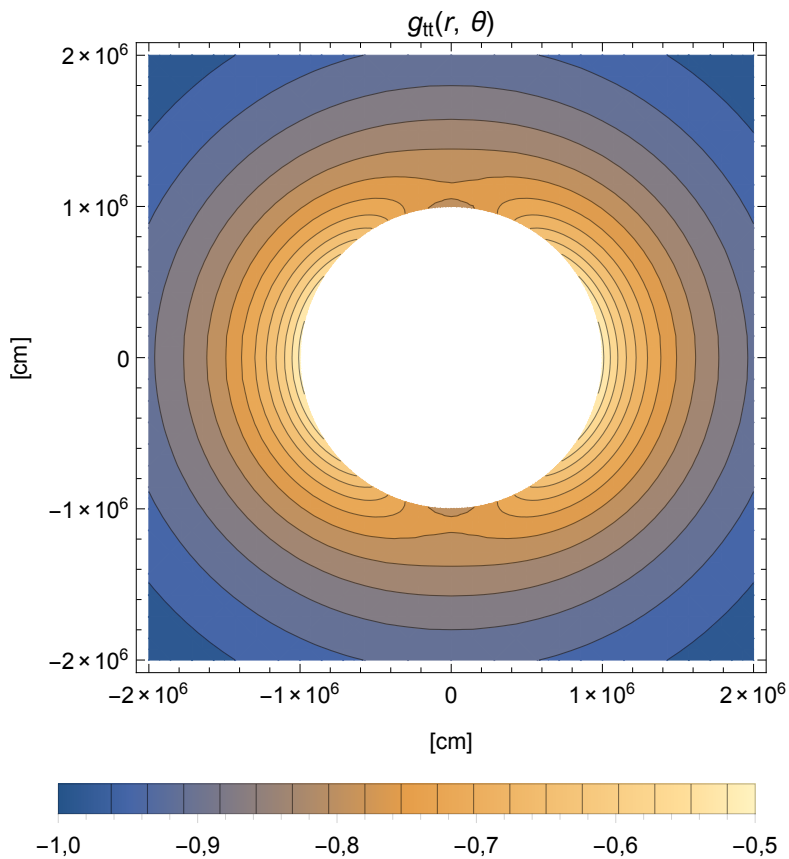
Devemos observar nos gráficos vistos que, para algumas componentes das métricas onde há campo magnético, obtemos limites  $r \rightarrow 0$  diferentes, dependendo do ângulo  $\theta$  que tomamos. Esse limite direcional deve ser investigado com mais cautela, tendo como causas possíveis o software utilizado ou o fato de que estejamos tomando

o limite passando por regiões não contínuas (presença de singularidades), regiões estas que descartamos como sendo não físicas.

Utilizando a mesma configuração física deste último conjunto de gráficos, produzimos a seguir gráficos em que observamos somente uma componente de uma três das métricas (com massa e campo magnético, somente massa ou somente campo magnético), através de gráficos de contornos.

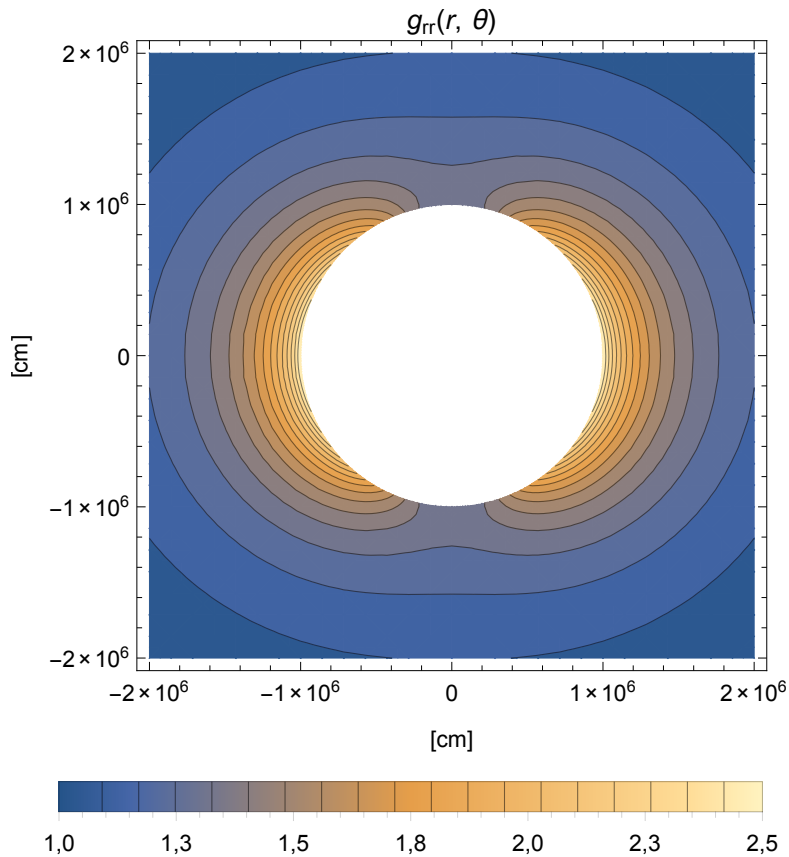


Figura 27 – Componente  $g_{tt}$  da métrica com massa e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



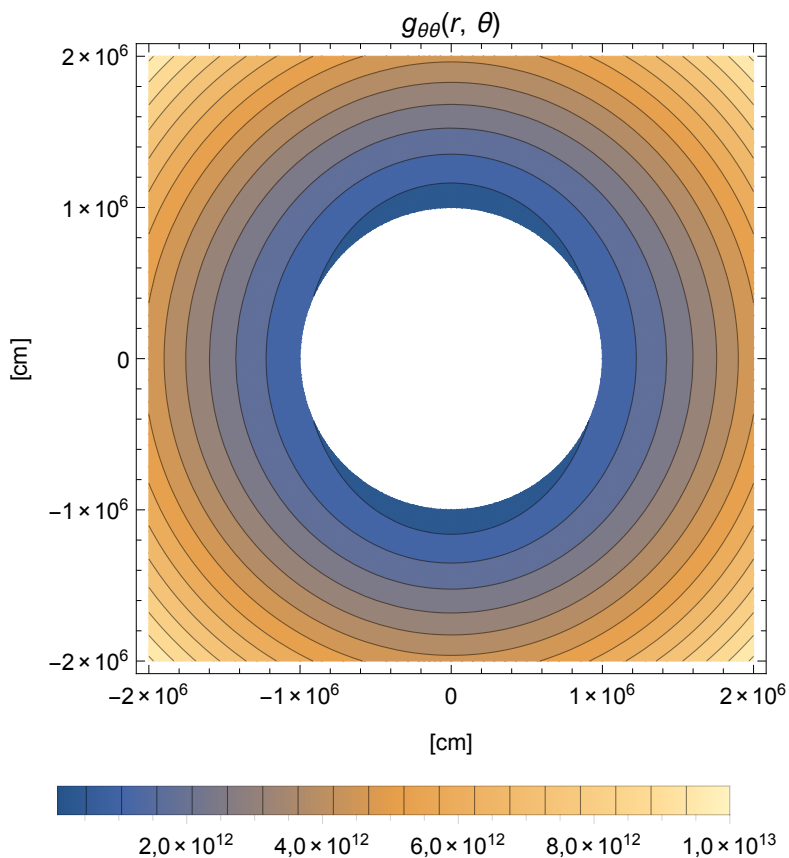
Variação da componente  $g_{tt}$  para a métrica com massa e campo magnético. A área em branco (para  $r < 10^6$  cm) está fora da região de interpretação física.

Figura 28 – Componente  $g_{rr}$  da métrica com massa e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



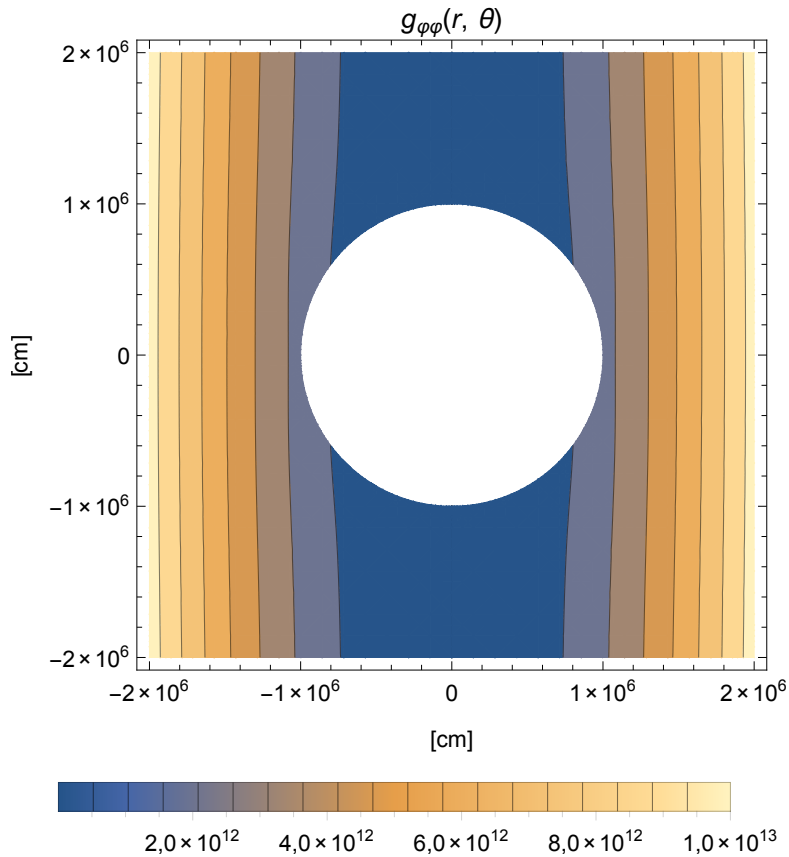
Variação da componente  $g_{rr}$  para a métrica com massa e campo magnético. A área em branco (para  $r < 10^6$  cm) está fora da região de interpretação física.

Figura 29 – Componente  $g_{\theta\theta}$  da métrica com massa e campo magnético  $B = 10^{18}$  G

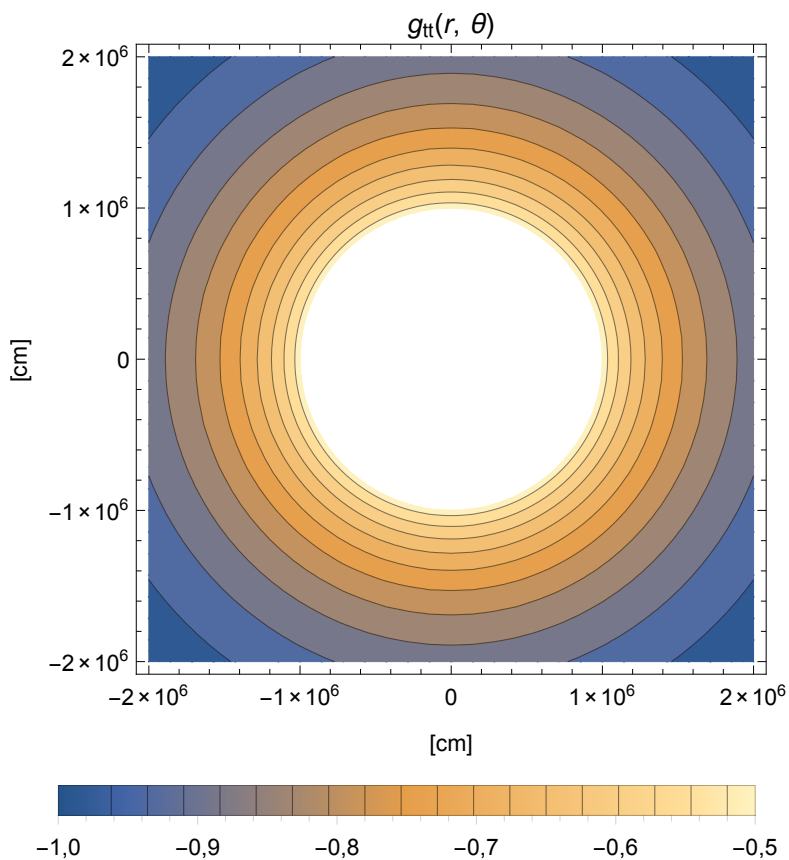


Variação da componente  $g_{\theta\theta}$  para a métrica com massa e campo magnético. A área em branco (para  $r < 10^6$  cm) está fora da região de interpretação física.

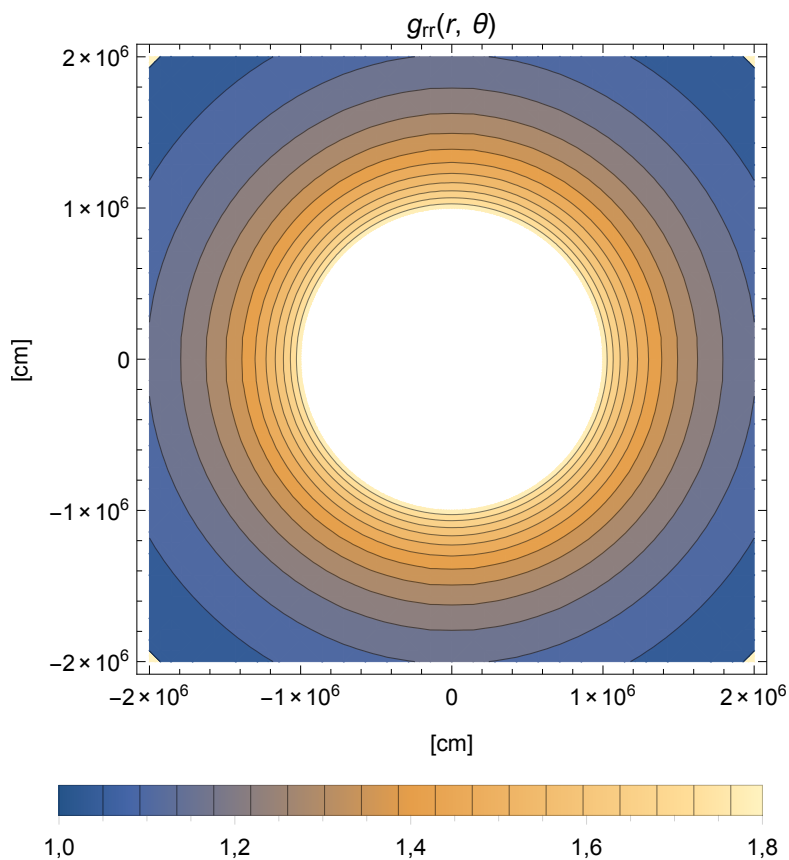
Figura 30 – Componente  $g_{\varphi\varphi}$  da métrica com massa e campo magnético  $B = 10^{18}$  G



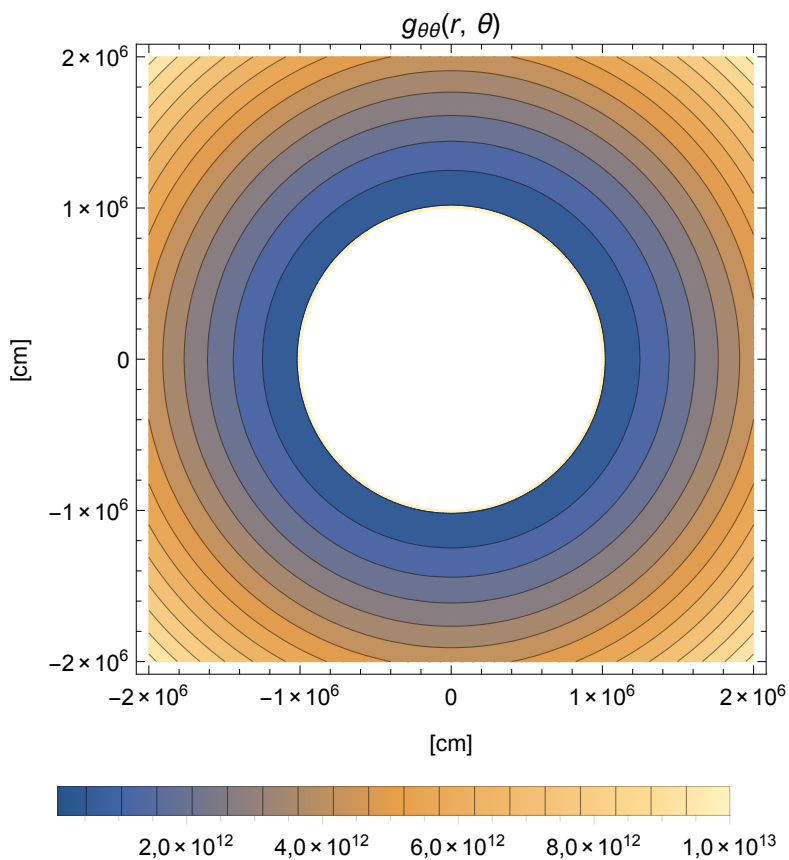
Varição da componente  $g_{\varphi\varphi}$  para a métrica com massa e campo magnético. A área em branco (para  $r < 10^6$  cm) está fora da região de interpretação física.

Figura 31 – Componente  $g_{tt}$  da métrica com massa

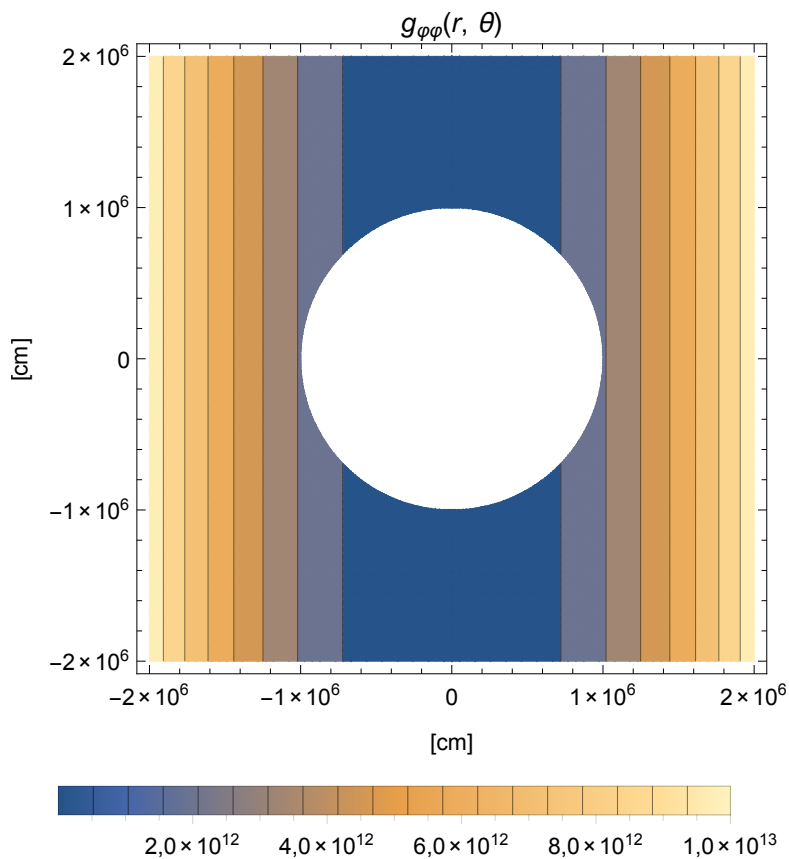
Variação da componente  $g_{tt}$  para a métrica com massa. A área em branco (para  $r < 10^6$  cm) está fora da região de interpretação física.

Figura 32 – Componente  $g_{rr}$  da métrica com massa

Variação da componente  $g_{rr}$  para a métrica com massa. A área em branco (para  $r < 10^6$  cm) está fora da região de interpretação física.

Figura 33 – Componente  $g_{\theta\theta}$  da métrica com massa

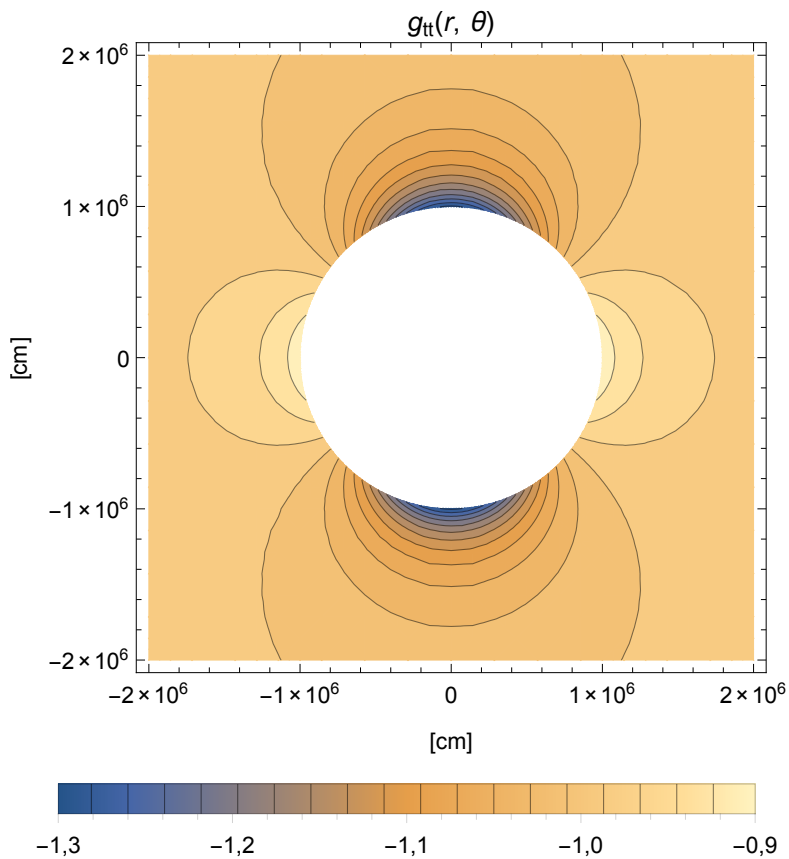
Variação da componente  $g_{\theta\theta}$  para a métrica com massa. A área em branco (para  $r < 10^6$  cm) está fora da região de interpretação física.

Figura 34 – Componente  $g_{\varphi\varphi}$  da métrica com massa

Variação da componente  $g_{\varphi\varphi}$  para a métrica com massa. A área em branco (para  $r < 10^6 \text{ cm}$ ) está fora da região de interpretação física.

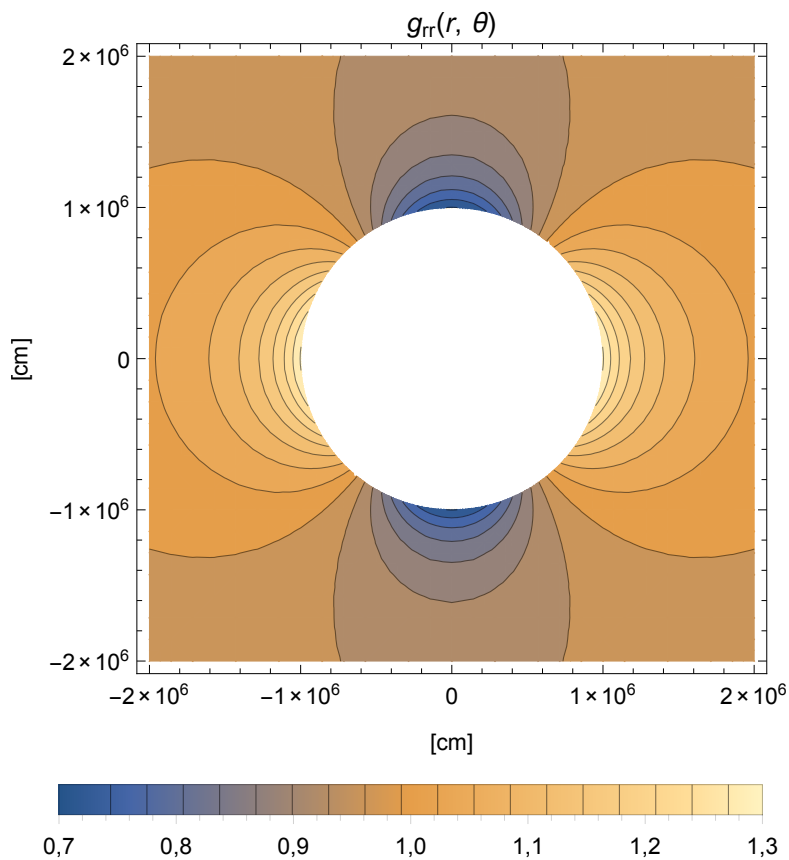


Figura 35 – Componente  $g_{tt}$  da métrica com campo magnético  
 $B = 10^{18}$  G



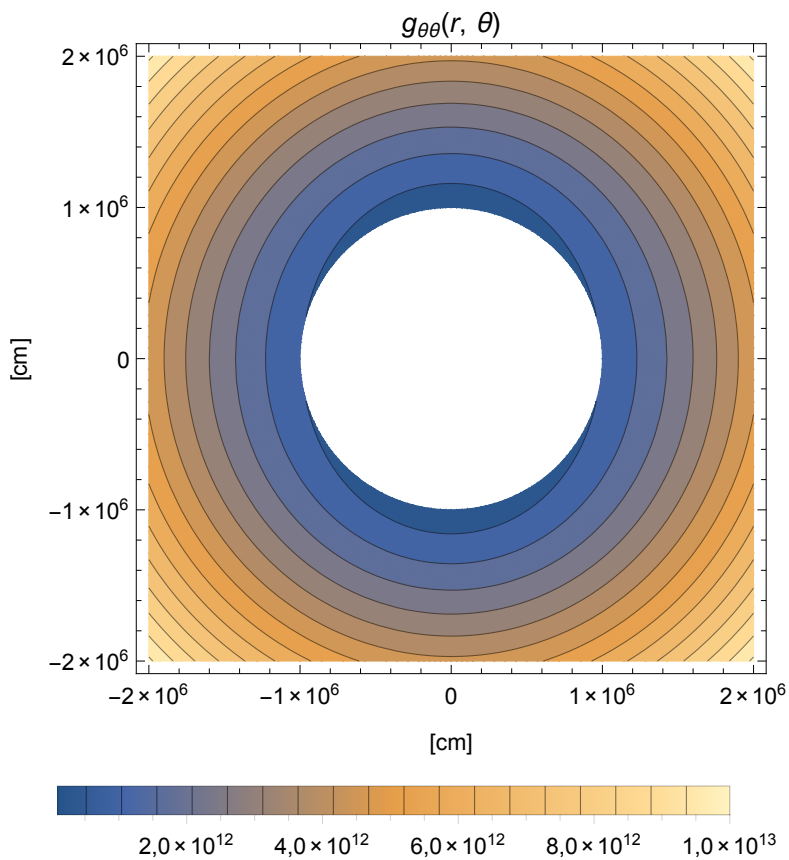
Varição da componente  $g_{tt}$  para a métrica com campo magnético. A área em branco (para  $r < 10^6$  cm) está fora da região de interpretação física.

Figura 36 – Componente  $g_{rr}$  da métrica com campo magnético  
 $B = 10^{18}$  G



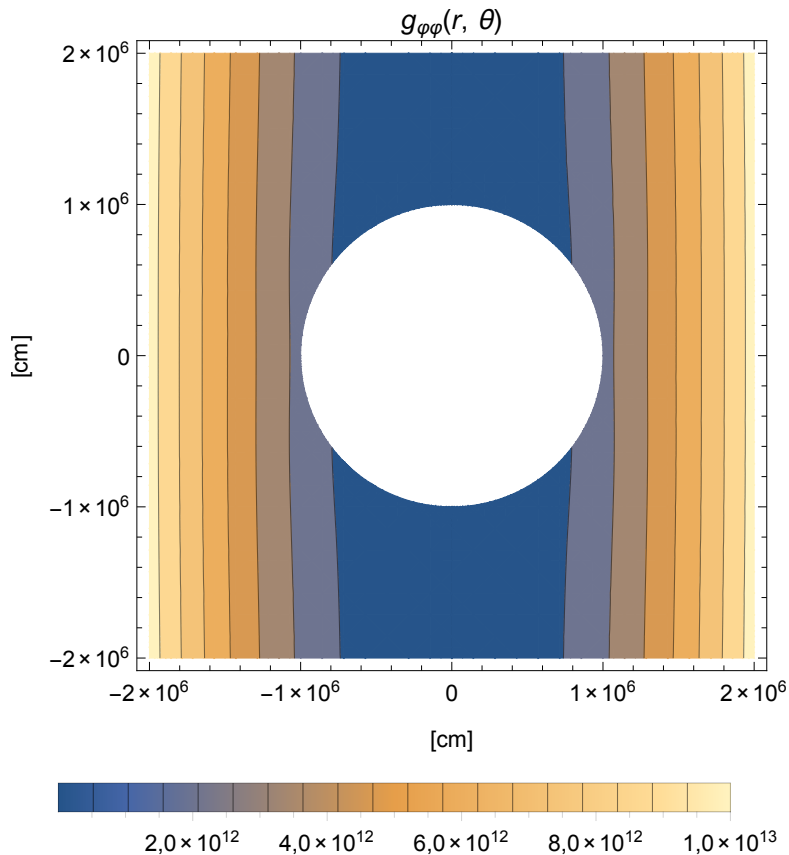
Variação da componente  $g_{rr}$  para a métrica com campo magnético. A área em branco (para  $r < 10^6$  cm) está fora da região de interpretação física.

Figura 37 – Componente  $g_{\theta\theta}$  da métrica com campo magnético  $B = 10^{18}$  G



Variação da componente  $g_{\theta\theta}$  para a métrica com campo magnético. A área em branco (para  $r < 10^6$  cm) está fora da região de interpretação física.

Figura 38 – Componente  $g_{\varphi\varphi}$  da métrica com campo magnético  
 $B = 10^{18}$  G



Variação da componente  $g_{\varphi\varphi}$  para a métrica com campo magnético. A área em branco (para  $r < 10^6$  cm) está fora da região de interpretação física.

Nos gráficos de contorno, podemos perceber facilmente os efeitos do campo magnético na métrica, quando comparados com a métrica de Schwarzschild.

A seguir, calculamos algumas tabelas que mostram a magnitude das variações das componentes  $g_{tt}$  e  $g_{rr}$ , quando comparamos o caso com massa e campo magnético contra o caso onde temos somente massa (solução de Schwarzschild). A coluna “Variação” nas tabelas indica em que casa decimal as componentes das métricas dos dois casos começam a diferir uma da outra. Esta diferença é justamente a diferença causada pela presença do campo magnético. Para cada tabela utilizamos um dos seguintes ângulos polares:  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  ou  $\theta = 90^\circ$ .

Tabela 1 – Variação da componente  $g_{tt}$  ( $\theta = 0^\circ$ )

Objeto	$R$ [cm]	$B$ [G]	Variação
Terra	$6,4 \times 10^8$	$6,5 \times 10^{-1}$	$10^{-25}$
Sol	$7,0 \times 10^{10}$	2,0	$10^{-23}$
Anã branca	$5,6 \times 10^8$	$1,0 \times 10^9$	$10^{-12}$
Magnetar	$1,0 \times 10^6$	$1,0 \times 10^{15}$	$10^{-7}$

Magnitude da variação da componente  $g_{tt}$  quando comparamos o caso com massa e campo magnético contra o caso com massa, para alguns objetos. A distância  $r$  em que estamos medindo a variação da métrica é de duas vezes o raio  $R$  aproximado do objeto e o ângulo polar é  $\theta = 0^\circ$ .

Tabela 2 – Variação da componente  $g_{tt}$  ( $\theta = 45^\circ$ )

Objeto	$R$ [cm]	$B$ [G]	Variação
Terra	$6,4 \times 10^8$	$6,5 \times 10^{-1}$	$10^{-26}$
Sol	$7,0 \times 10^{10}$	2,0	$10^{-20}$
Anã branca	$5,6 \times 10^8$	$1,0 \times 10^9$	$10^{-12}$
Magnetar	$1,0 \times 10^6$	$1,0 \times 10^{15}$	$10^{-5}$

Magnitude da variação da componente  $g_{tt}$  quando comparamos o caso com massa e campo magnético contra o caso com massa, para alguns objetos. A distância  $r$  em que estamos medindo a variação da métrica é de duas vezes o raio  $R$  aproximado do objeto e o ângulo polar é  $\theta = 45^\circ$ .

Tabela 3 – Variação da componente  $g_{tt}$  ( $\theta = 90^\circ$ )

Objeto	$R$ [cm]	$B$ [G]	Variação
Terra	$6,4 \times 10^8$	$6,5 \times 10^{-1}$	$10^{-25}$
Sol	$7,0 \times 10^{10}$	2,0	$10^{-20}$
Anã branca	$5,6 \times 10^8$	$1,0 \times 10^9$	$10^{-11}$
Magnetar	$1,0 \times 10^6$	$1,0 \times 10^{15}$	$10^{-5}$

Magnitude da variação da componente  $g_{tt}$  quando comparamos o caso com massa e campo magnético contra o caso com massa, para alguns objetos. A distância  $r$  em que estamos medindo a variação da métrica é de duas vezes o raio  $R$  aproximado do objeto e o ângulo polar é  $\theta = 90^\circ$ .

Tabela 4 – Variação da componente  $g_{rr}$  ( $\theta = 0^\circ$ )

Objeto	$R$ [cm]	$B$ [G]	Variação
Terra	$6,4 \times 10^8$	$6,5 \times 10^{-1}$	$10^{-25}$
Sol	$7,0 \times 10^{10}$	2,0	$10^{-23}$
Anã branca	$5,6 \times 10^8$	$1,0 \times 10^9$	$10^{-12}$
Magnetar	$1,0 \times 10^6$	$1,0 \times 10^{15}$	$10^{-8}$

Magnitude da variação da componente  $g_{rr}$  quando comparamos o caso com massa e campo magnético contra o caso com massa, para alguns objetos. A distância  $r$  em que estamos medindo a variação da métrica é de duas vezes o raio  $R$  aproximado do objeto e o ângulo polar é  $\theta = 0^\circ$ .

Tabela 5 – Variação da componente  $g_{rr}$  ( $\theta = 45^\circ$ )

Objeto	$R$ [cm]	$B$ [G]	Variação
Terra	$6,4 \times 10^8$	$6,5 \times 10^{-1}$	$10^{-17}$
Sol	$7,0 \times 10^{10}$	2,0	$10^{-15}$
Anã branca	$5,6 \times 10^8$	$1,0 \times 10^9$	$10^{-9}$
Magnetar	$1,0 \times 10^6$	$1,0 \times 10^{15}$	$10^{-4}$

Magnitude da variação da componente  $g_{rr}$  quando comparamos o caso com massa e campo magnético contra o caso com massa, para alguns objetos. A distância  $r$  em que estamos medindo a variação da métrica é de duas vezes o raio  $R$  aproximado do objeto e o ângulo polar é  $\theta = 45^\circ$ .

Tabela 6 – Variação da componente  $g_{rr}$  ( $\theta = 90^\circ$ )

Objeto	$R$ [cm]	$B$ [G]	Variação
Terra	$6,4 \times 10^8$	$6,5 \times 10^{-1}$	$10^{-16}$
Sol	$7,0 \times 10^{10}$	2,0	$10^{-14}$
Anã branca	$5,6 \times 10^8$	$1,0 \times 10^9$	$10^{-8}$
Magnetar	$1,0 \times 10^6$	$1,0 \times 10^{15}$	$10^{-4}$

Magnitude da variação da componente  $g_{rr}$  quando comparamos o caso com massa e campo magnético contra o caso com massa, para alguns objetos. A distância  $r$  em que estamos medindo a variação da métrica é de duas vezes o raio  $R$  aproximado do objeto e o ângulo polar é  $\theta = 90^\circ$ .

Devemos observar que todos os cálculos efetuados relativos à métrica com massa e campo magnético de dipolo, são uma aproximação razoável para o espaço-tempo na região externa de uma estrela, por exemplo. Obviamente, esses resultados não são exatos, pois mais detalhes, como a constituição dos objetos, deve ser considerada, o que forneceria as condições de contorno adequadas. Mesmo assim, as soluções fornecem informações a respeito dos efeitos dos campos desses objetos na métrica.

Podemos perceber nas tabelas que a presença de um campo magnético fraco interfere muito pouco na geometria do espaço-tempo. Somente quando temos campos magnéticos muito intensos é que obtemos variações mais apreciáveis na métrica. Nesses casos extremos essas variações são importantes. Para a Terra e o Sol, podemos dizer que a curvatura causada por seus respectivos campos magnéticos é totalmente desprezível.

As tabelas das componentes  $g_{\theta\theta}$  e  $g_{\varphi\varphi}$  não foram incluídas, pois a magnitude de suas variações é muito grande (devido aos fatores  $r^2$  e  $r^2 \sin^2(\theta)$  presentes em suas expressões).



No próximo capítulo estudaremos a influência das métricas no comprimento de onda da luz originada de uma magnetar.



## 5 UMA CONSEQUÊNCIA DA PRESENÇA DE UM DIPOLO MAGNÉTICO

A métrica de Schwarzschild, relativa à uma massa com simetria esférica na origem do sistema de coordenadas, origina um tensor métrico dependente apenas na coordenada  $r$ . A adição de um dipolo magnético causa uma dependência extra na métrica, na coordenada  $\theta$ . Investigaremos uma consequência e aplicação dessa dependência: a variação do comprimento de onda da luz (redshift ou blueshift gravitacionais) com o ângulo  $\theta$  de observação de um objeto com campo magnético de dipolo intenso.

As estrelas de nêutrons do tipo magnetar são objetos interessantes para nossos propósitos, pois possuem campos magnéticos muito intensos. Elas possuem uma massa comparável à massa do Sol, mas um raio de apenas poucos quilômetros e chegam a ter campos magnéticos da ordem de  $10^{15}$  G.

O comprimento de onda da luz originada de uma estrela de nêutrons hipotética, perfeitamente esférica, com densidade esfericamente simétrica de massa e sem campo magnético, não apresentaria variações dependentes de  $\theta$  (somente de  $r$ ), visto que a métrica relativa a esse cenário, a métrica de Schwarzschild, é esfericamente simétrica.

A mesma estrela todavia, agora dotada de um campo magnético, deve apresentar um comprimento de onda que varia com  $\theta$  também, já que a métrica desse caso não é mais esfericamente simétrica. Dada uma distância de observação fixa, dependendo do ângulo  $\theta$  que observarmos a magnetar, devemos obter medidas de comprimento de onda diferentes.

Vamos primeiramente calcular uma expressão da variação no comprimento de onda, dada uma métrica  $g_{\mu\nu}(r, \theta)$  nas coordenadas de Schwarzschild (VOJINOVIĆ, 2010). Da definição do intervalo de tempo próprio

$$d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}(r, \theta)dx^\mu dx^\nu}, \quad (5.1)$$

podemos dizer que num ponto 1, na vizinhança imediata de um objeto (que está na origem do sistema de coordenadas), sem movimento relativo a ele, ou seja  $dr = 0$ ,  $d\theta = 0$  e  $d\varphi = 0$ , o intervalo de tempo próprio é dado por

$$d\tau_1 = \sqrt{-g_{tt}(r, \theta)} dt. \quad (5.2)$$

Integrando em  $t$  num intervalo  $\Delta t$ , obtemos

$$\Delta\tau_1 = \sqrt{-g_{tt}(r, \theta)} \Delta t. \quad (5.3)$$

Similarmente, num ponto 2, radialmente distante  $r + D$  do objeto (onde  $D$  é um número real positivo), mas localizado nas mesmas coordenadas  $t$ ,  $\theta$  e  $\varphi$  que o ponto 1, temos que

$$\Delta\tau_2 = \sqrt{-g_{tt}(r + D, \theta)} \Delta t. \quad (5.4)$$

Vamos assumir que dois observadores, situados um em cada ponto, meçam um tempo próprio  $\Delta\tau$  de um processo físico, dado um tempo transcorrido  $\Delta t$ . Como a coordenada  $t$  é a mesma para os dois pontos, podemos igualar as duas expressões anteriores em  $\Delta t$ , obtendo

$$\Delta\tau_2 = \sqrt{\frac{g_{tt}(r + D, \theta)}{g_{tt}(r, \theta)}} \Delta\tau_1. \quad (5.5)$$

Agora, o comprimento de onda  $\lambda$  da luz emitida por um objeto, medido em um dos pontos, é dado pela velocidade da luz  $c$  multiplicada pelo intervalo de tempo próprio entre duas sucessivas cristas (ou vales) da onda naquele ponto, ou seja<sup>1</sup>

$$\lambda = c\Delta\tau = \Delta\tau. \quad (5.6)$$

---

<sup>1</sup> Como estamos em unidades geometrizadas,  $c = 1$ .

Assim, para os dois pontos definidos anteriormente, temos medições de comprimentos de onda diferentes da luz do objeto, determinados pelo intervalo de tempo próprio:

$$\lambda_1 = \Delta\tau_1, \quad (5.7)$$

$$\lambda_2 = \Delta\tau_2. \quad (5.8)$$

Finalmente, substituindo o intervalo de tempo próprio dado pelas relações (5.7) e (5.8) em (5.5), chegamos na relação

$$\lambda_2 = n\lambda_1, \quad (5.9)$$

onde o fator  $n$  é dado por

$$n = \sqrt{\frac{g_{tt}(r + D, \theta)}{g_{tt}(r, \theta)}}. \quad (5.10)$$

O fator de  $n$ , um número adimensional maior que zero, define o quanto o comprimento de onda da luz de um objeto na origem do sistema de coordenadas é alterado entre os pontos 1 e 2 devido à geometria do espaço-tempo, dada uma métrica  $g(r, \theta)$ . Um fator  $n > 1$  indica um redshift gravitacional. Um fator  $n < 1$  indica um blueshift gravitacional.

Vamos agora calcular o fator  $n$  para uma magnetar com campo magnético intenso. Utilizaremos os mesmo valores de massa e momento de dipolo magnético da seção anterior:

$$m = 2,1 \times 10^5 \text{ cm}, \quad (5.11)$$

$$q = 1,4 \times 10^8 \text{ cm}^2. \quad (5.12)$$

Utilizaremos para o ponto 1 um raio  $r$  próximo do raio de uma magnetar. O ponto 2 estará situado numa distância  $D$  do ponto 1 de aproximadamente 1 ano-luz. Temos que

$$r = 10 \text{ km} = 10^6 \text{ cm}, \quad (5.13)$$

$$D = 1 \text{ ano-luz} \approx 10^{18} \text{ cm}. \quad (5.14)$$

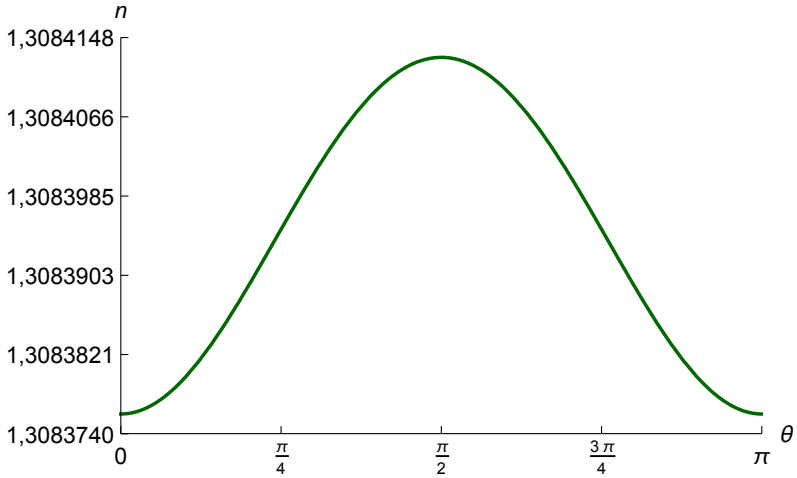
O ângulo  $\theta$ , que é o mesmo para os dois pontos, variará no intervalo

$$0 \leq \theta \leq \pi. \quad (5.15)$$

Vamos agora estudar o comportamento do fator  $n$  nos três casos de interesse: o caso com massa e campo magnético, o caso com somente massa (Schwarzschild) e o caso com somente campo magnético.

De posse dos valores de todas as variáveis necessárias, calculamos então o fator  $n$  a partir da equação (5.10), onde  $g_{tt}$  é dado pela equação (4.121), referente à métrica com massa e com campo magnético de dipolo, nas coordenadas de Schwarzschild. Variando o ângulo  $\theta$ , obtemos o gráfico da figura 39.

Figura 39 – Fator  $n$  para a métrica com massa e com campo magnético de dipolo



Variação do fator  $n$  de acordo com o ângulo  $\theta$  de observação da magnetar, para a métrica com campo magnético de dipolo ( $B = 10^{15}$  G).

Podemos perceber portanto a pequena dependência do fator  $n$  com o ângulo de observação  $\theta$  devido ao campo magnético de dipolo da magnetar. O fator  $n$  indica um redshift em todo o intervalo.

Obviamente, para a métrica sem campo magnético (métrica de Schwarzschild), com  $g_{tt}$  dado pela equação (4.132), não existe dependência em  $\theta$ :

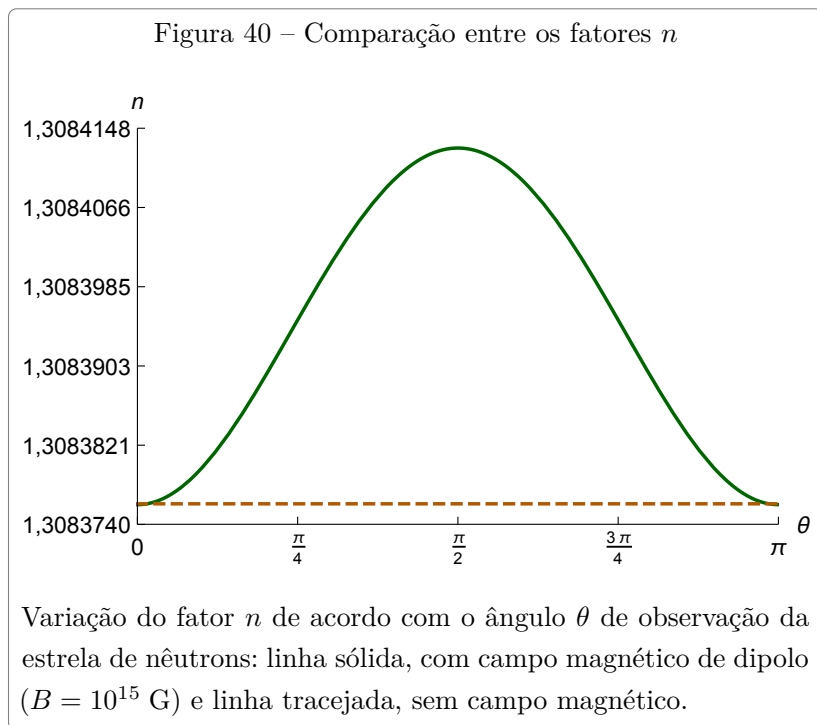
$$\frac{dg_{tt}}{d\theta} = \frac{d(\frac{2m}{r} - 1)}{d\theta} = 0, \quad (5.16)$$

e portanto não há variação do fator  $n$  associado a esta coordenada. Utilizando os mesmos valores das variáveis do caso com campo mag-

nético, obtemos que o fator  $n$  na métrica de Schwarzschild é

$$n = 1,3083761. \quad (5.17)$$

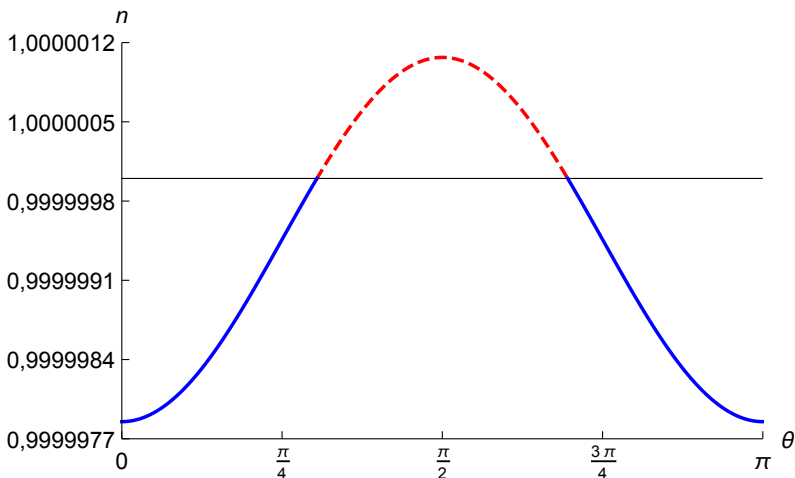
Sobrepondo este resultado na figura 39, temos um comparativo entre os dois casos, mostrado figura 40.



Vamos agora considerar um objeto sem massa, com apenas um campo magnético de dipolo. Até o momento não temos conhecimento de um objeto desse tipo, porém vamos calcular seu fator  $n$  utilizando os mesmos valores das variáveis nos casos anteriores. Aplicando a métrica desta situação, com  $g_{tt}$  dado pela equação (4.140), obtemos o gráfico da figura 41.



Figura 41 – Fator  $n$  para a métrica sem massa e com campo magnético de dipolo



Variação do fator  $n$  de acordo com o ângulo  $\theta$  de observação do objeto, para a métrica sem massa, com campo magnético de dipolo ( $B = 10^{15}$  G). A reta horizontal indica o fator  $n = 1$ , ou seja, quando não há mudança no comprimento de onda. A linha sólida indica onde ocorre blueshift ( $n < 1$ ) e a linha tracejada indica onde ocorre redshift ( $n > 1$ ).

Notamos que para ângulos mais próximos dos polos magnéticos, temos um blueshift da luz emitida deste objeto ( $n < 1$ ) e para ângulos mais próximos do equador magnético, temos um redshift ( $n > 1$ ).

Observando os resultados obtidos, podemos notar que as variações no fator de  $n$  devido ao campo magnético poderiam ser utilizadas para medir o campo magnético de uma magnetar, ou outro objeto que possua um forte campo magnético. Se tal objeto possuir um eixo de rotação diferente do eixo de momento de dipolo mag-

nético, teríamos aqui da Terra uma visão de diferentes regiões do campo magnético em tempos diferentes. Poderíamos monitorar um comprimento de onda específico desse objeto para diferentes valores do ângulo  $\theta$  e assim determinar o fator de  $n$  e consequentemente o campo magnético do mesmo. As diferenças observadas com a variação do ângulo  $\theta$ , apesar de serem muito pequenas, com métodos suficientemente precisos talvez possam ser medidas no futuro.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, tivemos como objetivo estudar o efeito de campos magnéticos intensos na métrica de um espaço-tempo no contexto da teoria da relatividade geral. Para tanto, foi utilizada a solução de Gutsunaev e Manko (1987), que é relativa um dipolo magnético no exterior de um objeto massivo, considerando a simetria axial.

No capítulo 2, fizemos uma breve introdução ao formalismo da teoria da relatividade geral. No capítulo 3, estudamos o espaço-tempo de simetria axial, a métrica de Weyl e calculamos as equações de campo de Einstein-Maxwell do caso geral eletrovácuo de simetria axial. No capítulo 4, utilizando o que foi exposto no capítulo 3, aplicamos a métrica de Weyl para um espaço-tempo que contempla somente o tensor energia-momento de um campo magnético. A solução de Gutsunaev e Manko foi então testada. Outros cenários da solução foram investigados: quando fizemos o campo magnético da solução tender a zero, obtivemos métrica de Schwarzschild, e quando fizemos a massa tender zero, obtivemos uma solução de um objeto composto somente de um campo magnético de dipolo. Verificamos também que o campo magnético da solução de Gutsunaev e Manko tinha a forma de um campo magnético de dipolo. Por fim, analisamos graficamente e quantitativamente o comportamento das métricas relativas às soluções estudadas.

Como vimos, a solução de Gutsunaev e Manko satisfaz as equações de campo de Einstein-Maxwell na métrica de Weyl, para um potencial vetor magnético que tem somente a componente na direção azimutal  $\hat{\varphi}$  não nula, condição suficiente (GRIFFITHS; PODOLSKÝ, 2009, p. 253) para a obtenção de uma solução de campo magnético que tenha simetria axial.

Para médias e longas distâncias essa solução representa muito bem a situação física de, por exemplo, uma estrela com campo magnético, pois sabemos que longe de uma fonte de campo magnético

o termo dominante é o termo de menor ordem, ou seja, o termo de dipolo, justamente o momento magnético dessa solução.

Para distâncias muito pequenas, como vimos nos gráficos, comecemos a perceber os dois polos do dipolo magnético que dá origem ao campo e a massa localizada no centro dessa distribuição. Essa situação não corresponde a uma situação real, pois mesmo que existam monopolos magnéticos, não haveria uma situação de equilíbrio, visto que duas cargas magnéticas de sinais opostos se atraem. Soluções onde há o equilíbrio existem para cargas elétricas de mesmo sinal, como observado em Griffiths e Podolsky (2009, p. 255).

Calculando o valor componentes da métrica referente à solução de Gutsunaev e Manko, para diversos objetos com campo magnético, verificamos que a magnitude dos desvios em relação à métrica de Schwarzschild é muito pequena, sendo desprezível para corpos celestes como Terra e o Sol, como visto nas tabelas 1 a 6. Quando estamos nas vizinhanças de objetos extremos, como por exemplo uma estrela do tipo magnetar, com um campo magnético da ordem de  $10^{15}$  G, temos variações um pouco mais expressivas, mas ainda assim pequenas. Somente com campos da ordem de  $10^{18}$  G, encontrados em colisões de íons pesados, é que obtemos efeitos que podem ser facilmente observados.

De posse dos resultados para as métricas, podemos supor que talvez exista a possibilidade de se observar efeitos nos casos de campos magnéticos da ordem de  $10^{15}$  G. A questão é então procurar objetos com observáveis que variem devido à curvatura do espaço-tempo, causada pela presença de um campo magnético intenso. Um observável natural seria o redshift da luz originada de um desses objetos.

Ao aplicarmos a métrica com massa e campo magnético, relativa à uma estrela do tipo magnetar (com um campo de  $10^{15}$  G), para a medição nas diferenças de redshift dependentes do ângulo  $\theta$ , vimos que os efeitos são muito sutis. Não investigamos se a medição

dessa pequena variação é factível ou não. Mais à frente talvez exista a possibilidade de se usar essa métrica, ou outras mais realistas, na medição de campos gravitacionais de corpos celestes utilizando esse método.

Perspectivas futuras envolvem o estudo aprofundado da metodologia utilizada na obtenção das soluções, bem como a investigação e obtenção de novas soluções relacionadas a essa estudada (GUTSUNAIEV; MANKO, 1988; POLANCO; LETELIER; UJEVIC, 2008), que envolvem uma massa com um campo magnético. A aplicação desse método para campos magnéticos mais complexos também é um assunto de interesse.

Considerando que uma forma razoável para o campo magnético externo à uma estrela é a de um dipolo, essa solução pode ser usada como solução externa, e então conectada à solução interna, onde pode ser considerado um tensor energia-momento que contemple a matéria estelar e o campo magnético interno. Podemos concluir que muitos sistemas físicos de interesse podem ser considerados com esse tipo de abordagem, o que pretendemos fazer na continuidade desse trabalho.



## REFERÊNCIAS

- BACH, R. Neue lösungen der einsteinschen gravitationsgleichungen. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 13, n. 1, p. 119–133, 1922.
- BACH, R.; WEYL, H. Republication of: New solutions to Einstein's equations of gravitation. Explicit determination of static, axially symmetric fields. *General Relativity and Gravitation*, Springer US, v. 44, n. 3, p. 817–832, 2012.
- D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 1992.
- DUNCAN, R. C.; THOMPSON, C. Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts. *Astrophysical Journal*, v. 392, p. L9–L13, 1992.
- EINSTEIN, A. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 844-847., p. 844–847, 1915.
- EINSTEIN, A. The field equations of gravitation. Princeton University Press, 2014. Disponível em: <<http://einsteinpapers.press.princeton.edu>>.
- EINSTEIN, A. et al. The principle of relativity. The University of Calcutta, p. 272, 1920.
- FORMIGHIERI, G. *Cálculos referentes à dissertação deste autor*. 2015. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/0BxNkSfJiVEisd2wwa0VBSzZ3Mzg/view?usp=sharing>>.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. [S.l.]: Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1999.
- GRIFFITHS, J. B.; PODOLSKÝ, J. *Exact space-times in Einstein's general relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- GUTSUNAEV, T. I.; MANKO, V. On the gravitational field of a mass possessing a magnetic dipole moment. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 123, n. 5, p. 215–216, 1987.
- GUTSUNAEV, T. I.; MANKO, V. New static solutions of the einstein-maxwell equations. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 132, n. 2, p. 85–87, 1988.

GUTSUNAEV, T. I.; MANKO, V.; ABRAMYAN, S. Problemi statist. *Fiziki i Teorii Polya (in Russian)*, v. 129, 1987.

KERR, R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 11, p. 237–238, 1963.

MATHEMATICA. *Version 10*. Champaign, Illinois: Wolfram Research, Inc., 2014.

NEWMAN, E. T. et al. Metric of a rotating, charged mass. *Journal of Mathematical Physics*, v. 6, n. 6, p. 918–919, 1965.

OHANIAN, H. C.; RUFFINI, R. *Gravitation and spacetime*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.

POLANCO, J. D.; LETELIER, P. S.; UJEVIC, M. Static charged fluid around a massive magnetic dipole. *Physical Review D*, APS, v. 78, n. 2, 2008.

REISSNER, H. Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 355, n. 9, p. 106–120, 1916.

SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 1916, Seite 189-196, v. 1, p. 189–196, 1916.

SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a point mass according to Einstein's theory. (*English translation*), *The Abraham Zelmanov Journal*, v. 1, p. 10–19, 2008.

STEPHANI, H. et al. *Exact solutions of Einstein's field equations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.

VOJINOVIĆ, M. Schwarzschild solution in general relativity. *Lecture series on general relativity*, Universidade de Lisboa, 2010.

WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010.

WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: Principle and applications of general theory of relativity*. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc., New York, 1972.



WEYL, H. Zur gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 359, n. 18, p. 117–145, 1917.

WEYL, H. Bemerkung über die axialsymmetrischen lösungen der einsteinschen gravitationsgleichungen. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 364, n. 10, p. 185–188, 1919.

WEYL, H. Republication of: 3. on the theory of gravitation. *General Relativity and Gravitation*, Springer US, v. 44, n. 3, p. 779–810, 2012.

WEYL, H. Republication of: 5. comment on the axially symmetric solutions to Einstein's equations of gravitation. *General Relativity and Gravitation*, Springer US, v. 44, n. 3, p. 811–815, 2012.



## APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO DE GUTSUNAEV E MANKO

As equações de Einstein-Maxwell, sobre o qual a solução de Gutsunaev e Manko<sup>1</sup> é construída, são apresentadas na forma

$$0 = (\nabla f)^2 + 2\rho^{-2}f^3(\nabla a)^2 - f\Delta f, \quad (\text{A.1})$$

$$0 = \nabla(\rho^{-2}f\nabla a), \quad (\text{A.2})$$

$$0 = \rho f^{-2}(f_{,\rho}^2 - f_{,z}^2) + 4\rho^{-1}f(a_{,\rho}^2 - a_{,z}^2) - 4h_{,\rho}, \quad (\text{A.3})$$

$$0 = \rho f^{-2}f_{,\rho}f_{,z} + 4\rho^{-1}fa_{,\rho}a_{,z} - 2h_{,z}. \quad (\text{A.4})$$

Os operadores diferenciais  $\nabla$  e  $\Delta$  são definidos em coordenadas de Weyl como

$$\Delta = \nabla^2 = \partial_{\rho\rho} + \rho^{-1}\partial_{\rho} + \partial_{zz}, \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla = \hat{\rho}\partial_{\rho} + \hat{z}\partial_z, \quad (\text{A.6})$$

onde  $\hat{\rho}$  e  $\hat{z}$  são vetores unitários.

Se introduzirmos novas funções

$$\epsilon_1 = f^{1/2} + a', \quad (\text{A.7})$$

$$\epsilon_2 = f^{1/2} - a', \quad (\text{A.8})$$

---

<sup>1</sup> Ver (GUTSUNAEV; MANKO, 1988).

com

$$a'_{,\rho} = \rho^{-1} f a_{,z}, \quad (\text{A.9})$$

$$a'_{,z} = -\rho^{-1} f a_{,\rho}, \quad (\text{A.10})$$

podemos transformar as equações (A.1), (A.2), (A.3) e (A.4) para a forma

$$2(\nabla\epsilon_1)^2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)\Delta\epsilon_1, \quad (\text{A.11})$$

$$2(\nabla\epsilon_2)^2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)\Delta\epsilon_2, \quad (\text{A.12})$$

$$h_{,\rho} = 4\rho(\epsilon_1 + \epsilon_2)^{-2} (\epsilon_{1,\rho}\epsilon_{2,\rho} - \epsilon_{1,z}\epsilon_{2,z}), \quad (\text{A.13})$$

$$h_{,z} = 4\rho(\epsilon_1 + \epsilon_2)^{-2} (\epsilon_{1,\rho}\epsilon_{2,z} - \epsilon_{1,z}\epsilon_{2,\rho}). \quad (\text{A.14})$$

Não é difícil mostrar que as equações (A.11) e (A.12), são satisfeitas (GUTSUNAEV; MANKO; ABRAMYAN, 1987) pelas relações

$$\epsilon_1 = e^\psi \left( 1 - \frac{2(1-A)(1-B)}{\sigma(1-AB) + \xi(B-A) + (1-A)(1-B)} \right), \quad (\text{A.15})$$

$$\epsilon_2 = e^\psi \left( 1 - \frac{2(1+A)(1+B)}{\sigma(1-AB) + \xi(A-B) + (1+A)(1+B)} \right), \quad (\text{A.16})$$

onde  $\sigma$  e  $\xi$  são coordenadas prolatas esferoidais,  $\psi(\sigma, \xi)$  é uma solução arbitrária da equação  $\Delta\psi = 0$ , e as funções  $A$  e  $B$  são definidas pelas equações diferenciais parciais de primeira ordem

$$A_{,\sigma} = A(\sigma - \xi)^{-1} ((\sigma\xi - 1)\psi_{,\sigma} + (1 - \xi^2)\psi_{,\xi}), \quad (\text{A.17})$$

$$A_{,\xi} = A(\sigma - \xi)^{-1} (-(\sigma^2 - 1)\psi_{,\sigma} + (\sigma\xi - 1)\psi_{,\xi}), \quad (\text{A.18})$$

$$B_{,\sigma} = -B(\sigma + \xi)^{-1} ((\sigma\xi + 1)\psi_{,\sigma} + (1 - \xi^2)\psi_{,\xi}), \quad (\text{A.19})$$

$$B_{,\xi} = -B(\sigma + \xi)^{-1} (-(\sigma^2 - 1)\psi_{,\sigma} + (\sigma\xi + 1)\psi_{,\xi}). \quad (\text{A.20})$$

As coordenadas prolatas esferoidais estão relacionadas com as coordenadas de Weyl por

$$\rho = k\sqrt{1 - \xi^2}\sqrt{\sigma^2 - 1}, \quad (\text{A.21})$$

$$z = k\xi\sigma, \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{(z - k)^2 + \rho^2} + \sqrt{(k + z)^2 + \rho^2}}{2k}, \quad (\text{A.23})$$

$$\xi = \frac{\sqrt{(k + z)^2 + \rho^2} - \sqrt{(z - k)^2 + \rho^2}}{2k}, \quad (\text{A.24})$$

sendo  $k$  uma constante real e, nas novas coordenadas, os operadores diferenciais  $\nabla$  e  $\Delta$  tomam a forma

$$\begin{aligned} \Delta = k^{-2} (\sigma^2 - \xi^2)^{-1} & (\partial_\sigma ((\sigma^2 - 1) \partial_\sigma) \\ & + \partial_\xi ((1 - \xi^2) \partial_\xi)), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \nabla = k^{-1} (\sigma^2 - \xi^2)^{-1/2} \left( \hat{\sigma} (\sigma^2 - 1)^{1/2} \partial_\sigma \right. \\ \left. + \hat{\xi} (1 - \xi^2)^{1/2} \partial_\xi \right), \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

onde  $\hat{\sigma}$  e  $\hat{\xi}$  são vetores unitários.

A equação  $\Delta\psi = 0$  é satisfeita se

$$\psi = \delta \ln \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}, \quad (\text{A.27})$$

sendo que  $\delta$  é uma constante real.

Através das equações (A.17), (A.18), (A.19) e (A.20), encontramos as soluções

$$A = b (\sigma - \xi)^{2\delta} (\sigma^2 - 1)^{-\delta}, \quad (\text{A.28})$$

$$B = p (\sigma + \xi)^{2\delta} (\sigma^2 - 1)^{-\delta}. \quad (\text{A.29})$$

Agora, fazendo a constante  $p$  igual a  $-b$ , chegamos às seguintes relações:

$$\epsilon_1 = \left( \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \right)^\delta \frac{\sigma P - \xi Q - W^{(-)}}{\sigma P - \xi Q + W^{(-)}}, \quad (\text{A.30})$$

$$\epsilon_2 = \left( \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \right)^\delta \frac{\sigma P + \xi Q - W^{(+)}}{\sigma P + \xi Q + W^{(+)}}, \quad (\text{A.31})$$

onde

$$P = (\sigma^2 - 1)^{2\delta} + b^2 (\sigma^2 - \xi^2)^{2\delta}, \quad (\text{A.32})$$

$$Q = b (\sigma^2 - 1)^\delta \left( (\sigma - \xi)^{2\delta} + (\sigma + \xi)^{2\delta} \right), \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} W^{(\mp)} &= \left( (\sigma^2 - 1)^\delta \mp b (\sigma - \xi)^{2\delta} \right) \\ &\times \left( (\sigma^2 - 1)^\delta \pm b (\sigma + \xi)^{2\delta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

A solução que estudamos neste trabalho surge quando  $\delta = -1/2$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \left( \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \right)^{1/2} \\ &\times \frac{\sigma^2 - \xi^2 + b^2 (\sigma + 1)^2 - 2b\xi (\sigma^2 - 1)^{1/2}}{\sigma^2 - \xi^2 + b^2 (\sigma - 1)^2 - 2b\xi (\sigma^2 - 1)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \left( \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \right)^{1/2} \\ &\times \frac{\sigma^2 - \xi^2 + b^2 (\sigma + 1)^2 + 2b\xi (\sigma^2 - 1)^{1/2}}{\sigma^2 - \xi^2 + b^2 (\sigma - 1)^2 + 2b\xi (\sigma^2 - 1)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} e^{2h} &= \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 - \xi^2} \\ &\times \frac{\left( (\sigma^2 - \xi^2 + b^2 (\sigma^2 - 1))^2 + 4b^2 \sigma^2 (1 - \xi^2) \right)^4}{(1 + b^2)^8 (\sigma^2 - \xi^2)^8}, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

sendo que a solução  $e^{2h}$  é encontrada por integração através das equações (A.13) e (A.14).



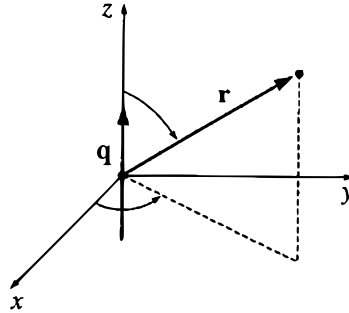
## APÊNDICE B – MOMENTO DE DIPOLO MAGNÉTICO DE UMA MAGNETAR

O valor do campo magnético  $\vec{B}$  dado um momento de dipolo magnético  $\vec{q}$  o orientado na direção  $\hat{z}$ , de acordo com a figura 42, é (GRIFFITHS, 1999, p. 246):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{q} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{q}}{r^3}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $\hat{r}$  é o vetor unitário que aponta numa direção radial.

Figura 42 – Configuração do momento de dipolo magnético



O momento de dipolo magnético  $\vec{q}$  aponta na direção  $\hat{z}$ .

Se considerarmos o maior valor possível de  $\vec{B}$ , quando o produto escalar entre  $\vec{q}$  e  $\hat{r}$  é máximo, ou seja, quando  $\hat{r}$  aponta também na direção  $\hat{z}$ , temos que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3q\hat{r} - \vec{q}}{r^3} = \frac{2\vec{q}}{r^3}. \quad (\text{B.2})$$

Desta forma, a expressão para o módulo do momento de dipolo magnético orientado na direção  $\hat{z}$  em função do campo magné-

tico é dada por

$$q = \frac{Br^3}{2}. \quad (\text{B.3})$$

Sabe-se que as magnetares podem ter campos de até  $10^{15}$  G em sua superfície. O raio típico de uma magnetar é de  $R = 10$  Km, ou em unidades do sistema cgs-Gaussiano,  $R = 10^6$  cm. Utilizando-se esses valores, obtemos o seguinte valor de momento magnético para nossa magnetar no sistema de unidades cgs-Gaussiano:

$$q = \frac{10^{15} \times (10^6)^3}{2} = 5 \times 10^{32} \frac{\text{erg}}{\text{G}}. \quad (\text{B.4})$$

## APÊNDICE C – CONSISTÊNCIA DE UNIDADES

### C.1 MOMENTO DE DIPOLO MAGNÉTICO

Vimos que a expressão para o cálculo de momento de dipolo magnético de uma magnetar pode ser dada pela equação (B.3). No sistema cgs-Gaussiano, as unidades das variáveis dessa equação são

$$B \rightarrow [\text{G}] \text{ (Gauss)}, \quad (\text{C.1})$$

$$r \rightarrow [\text{cm}] \text{ (centímetro)}. \quad (\text{C.2})$$

Logo as unidades da expressão (B.3) ficam da forma

$$[\text{G}][\text{cm}]^3. \quad (\text{C.3})$$

Afirmamos também que as unidades do momento de dipolo magnético de nossa magnetar, na expressão (B.4), são

$$\frac{[\text{erg}]}{[\text{G}]}. \quad (\text{C.4})$$

As unidades das duas expressões anteriores devem ser iguais, portanto, vamos verificar. As unidades G e erg no sistema cgs-Gaussiano também podem ser definidas por

$$[\text{G}] = \sqrt{\frac{[\text{g}]}{[\text{cm}]}} \frac{1}{[\text{s}]}, \quad (\text{C.5})$$

$$[\text{erg}] = \frac{[\text{g}][\text{cm}]^2}{[\text{s}]^2}. \quad (\text{C.6})$$

Logo temos que

$$[G][\text{cm}]^3 = \left( \sqrt{\frac{[\text{g}]}{[\text{cm}]}} \frac{1}{[\text{s}]} \right) [\text{cm}]^3 = \frac{\sqrt{[\text{g}]}}{[\text{s}]} [\text{cm}]^{5/2}, \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{[\text{erg}]}{[G]} = \left( \frac{[\text{g}][\text{cm}]^2}{[\text{s}]^2} \right) \left( \sqrt{\frac{[\text{g}]}{[\text{cm}]}} \frac{1}{[\text{s}]} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{[\text{g}]}}{[\text{s}]} [\text{cm}]^{5/2}. \quad (\text{C.8})$$

Demonstramos então que as unidades são as mesmas nas duas expressões.

## C.2 GEOMETRIZAÇÃO DE QUANTIDADES DO SISTEMA CGS-GAUSSIANO

Em um sistema de unidades geometrizado, a velocidade da luz no vácuo  $c$  e a constante gravitacional  $G^1$  são iguais à unidade. Todas as outras unidades nesse esquema se tornam alguma função de unidades de distância, e como estamos no sistema cgs-Gaussiano, elas se tornam funções de unidades em centímetros. Vamos aqui converter a massa  $m$  e o momento de dipolo magnético  $q$  no sistema cgs-Gaussiano para o esquema geometrizado.

A massa no sistema cgs-Gaussiano é dada em gramas. Para converter para o sistema geometrizado, devemos multiplicar pelo fator  $G/c^2$ :

$$[\text{g}] = \frac{G}{c^2} [\text{cm}] \approx 7,43 \times 10^{-29} [\text{cm}], \quad (\text{C.9})$$

onde  $c$  e  $G$  são a velocidade da luz no vácuo e a constante gravitacional, respectivamente.

---

<sup>1</sup> Atenção: não confundir a unidade de campo magnético  $[G]$  com a constante gravitacional  $G$ , em itálico.

Vimos que o momento de dipolo magnético pode ser dado nas seguintes unidades do sistema cgs-Gaussiano (equações (C.7) ou (C.8)):

$$\frac{\sqrt{[g]}}{[s]} [cm]^{5/2}. \quad (C.10)$$

Na expressão acima a conversão da unidade de massa do sistema cgs-Gaussiano para a versão geometrizada já foi vista em (C.9). A conversão da unidade tempo para a versão geometrizada é dada por

$$[s] = c[cm] \approx 3 \times 10^{10} [cm]. \quad (C.11)$$

Agora, substituindo as unidades de massa e tempo da expressão (C.10) por suas versões geometrizadas, obtemos

$$\sqrt{\frac{G}{c^2}} [cm] \frac{1}{c[cm]} [cm]^{5/2} = \frac{\sqrt{G}}{c^2} [cm]^2, \quad (C.12)$$

ou seja, para convertermos o momento de dipolo magnético do sistema cgs-Gaussiano para o sistema cgs-Gaussiano geometrizado, onde as unidades estão agora em centímetros quadrados, devemos multiplicar pelo fator  $\sqrt{G}/c^2$ .

Podemos ver que as unidades estão corretas se observarmos uma das equações que fazem parte das soluções das equações de Einstein, a saber, a equação (4.111):

$$b = \frac{\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}m}{\sqrt{8m^2 + 3\sqrt{3}q}}}}{\sqrt{3}}, \quad (C.13)$$

onde temos a soma de uma massa  $m$  dada em centímetros e elevada ao quadrado (e portanto tendo unidades de centímetros quadrados) com o momento de dipolo magnético também dado em centímetros quadrados.